

Hidráulica Básica [2015961]
Tema # 1: Flujo real y disipación de energía

Luis Alejandro Morales (Ph.D)
Profesor Asistente

Universidad Nacional de Colombia-Bogotá
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola

Contents

1	Fluido ideal y fluido real	2
1.1	Flujo ideal	2
1.2	Flujo real	3
2	Capa limite en flujo a presión	3
3	Esfuerzo de corte y perdidas de cabeza de energía	4
4	Experimentos de Reynolds	7
5	Flujo laminar	7
5.1	Flujo laminar en conductos y coronas	9
5.2	Flujo laminar en tuberías circulares: ecuación de Hagen-Poiseuille	11
6	Flujo turbulento	13
6.1	Esfuerzo de corte turbulento	13
6.2	Longitud de mezcla de Prandtl	14
6.3	Distribuciones de velocidad	15
6.4	Pérdidas de energía	18
6.5	Cálculo del factor de fricción	20
6.6	Otras ecuaciones para calcular las pérdidas de energía	24
7	Pérdidas menores	25
7.1	Longitud equivalente	30
8	Flujo normal a superficie libre	31
8.1	Estimación de la profundidad normal	33
8.2	Sección óptima de un canal	34
8.3	Cálculo de la profundidad normal en cauces naturales	36

1 Fluido ideal y fluido real

1.1 Flujo ideal

Un **fluido ideal** es un fluido hipotético en donde se asume que el fluido no tiene viscosidad por lo tanto la *ley de viscosidad de newton*

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1)$$

en donde τ es el esfuerzo de corte, μ es la viscosidad dinámica y $u = f(y)$ es la velocidad del flujo, no es aplicable. Esto quiere decir que la fricción en el flujo es despreciable por lo tanto no existen esfuerzos de corte entre capas ni con los contornos, lo que implica que no hay disipación de energía debido a la fricción ni formación de remolinos. En un fluido ideal las partículas se mueven unas sobre otras sin ningún tipo de resistencia, sometidas a fuerzas hidroestáticas aplicadas sobre su superficie. El movimiento y la aceleración de dichas partículas se presenta gracias al desbalance de fuerzas actuantes de acuerdo con la *segunda ley de Newton*. La suposición de fluido ideal es de gran ayuda para el análisis de problemas prácticos en ingeniería en donde las fuerzas viscosas son despreciables dando resultados precisos. Por ejemplo si se quiere determinar la fuerza de levantamiento del ala de un avión es posible asumir un fluido ideal, sin embargo, dicha suposición no sería correcta si se quisiera determinar la fuerza de arrastre sobre el ala de un avión. Asumiendo el flujo de partículas de fluido ideal e *incompresible* (en donde la densidad no cambia) y de acuerdo con la *segunda ley de Newton*, se deduce la *ecuación de Bernoulli*:

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z = H = \text{Constante} \quad (2)$$

donde p es la presión (absoluta o manométrica), V es la velocidad media del flujo, z es la altura del sistema con respecto a un nivel de referencia y H es la cabeza de energía total en una sección del flujo la cual es constante ($H_1 = H_2$) y equivale a la suma de la *cabeza de energía de presión* (p/γ), *cabeza de energía cinética* ($V^2/2g$) y *cabeza de energía potencial* (z). Note que al término $\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$ se le conoce como *cabeza de presión dinámica* la cual se puede medir usando un *tubo Pitot*. La ecuación de Bernoulli, puede ser expresada gráficamente a través de la *línea de energía* ($LE=H$) y *línea de gradiente hidráulico* ($LGH = p/\gamma + z$).

La inclusión (a través de una *bomba*) o la extracción (a través de una *turbina*) de energía a un flujo de un fluido ideal da lugar a una forma mas completa de la ecuación de Bernoulli conocida también como la *ecuación de trabajo-energía*:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_B = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_T \quad (3)$$

donde h_B es la energía suministrada por una bomba y h_T es la energía sustraída por una turbina. La potencia hidráulica (P_H) suministrada (bomba) al flujo o extraída (turbina) del flujo, se calcula como:

$$P_H = \gamma h Q \quad (4)$$

donde h es la cabeza de energía mecánica (h_B o h_T) y Q es el caudal. La *potencia nominal* (o *mecánica*) (P_n) es:

$$P_n = \frac{P_H}{\eta} \quad (5)$$

donde η es la eficiencia de la bomba.

1.2 Flujo real

En un **flujo real** su movimiento es controlado por las *fuerzas de fricción* y las *fuerzas turbulentas*. Esto quiere decir que para mover un flujo real, es necesario realizar trabajo sobre el flujo para vencer estos esfuerzos y dicha energía se convierte en calor. Es por esto que en un *flujo laminar* las capas de fluido adyacentes se mueven a velocidades diferentes en función de la transmisión de esfuerzos de corte en la interface. Lo mismo ocurre en las fronteras solidas en donde la fricción de las paredes son transmitidas a las capas de flujo haciendo que su velocidad aumente a medida que se alejan de las paredes. El grado de "pegajosidad" depende de la viscosidad del fluido. Los fluidos reales también se conocen como *flujos Newtonianos* por que siguen la ley de viscosidad de Newton (ver Ecuación 1).

En el caso de *flujos turbulentos*, flujos a velocidades altas generalmente, los esfuerzos viscosos generan vortices en el flujo. Si a las ecuaciones de *Euler* se le adicionan los términos debido a los esfuerzos de corte, se obtienen las *ecuaciones de Navier-Stokes* las cuales son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales y de segundo grado que describen el movimiento de flujos reales, compresibles o incompresibles y permanentes o no permanentes. Las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles son:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma h) + \nu \nabla^2 u = \frac{du}{dt} \quad (6)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}(p + \gamma h) + \nu \nabla^2 v = \frac{dv}{dt} \quad (7)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z}(p + \gamma h) + \nu \nabla^2 w = \frac{dw}{dt} \quad (8)$$

donde ν es la viscosidad cinemática (constante para este caso), $\frac{d}{dt} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$ es la derivada total y $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (laplaciano). Para un fluido no viscoso, las ecuaciones de Navier-Stokes se convierten en las *ecuaciones de Euler*.

Los efectos de los esfuerzos viscosos, son mas notorios en cercanías a las fronteras solidas (e.g fondo del canal o paredes de una tubería); dicha región es conocida como *capa límite*.

2 Capa limite en flujo a presión

En un flujo real la **capa límite** es una porción de la sección de flujo en donde los esfuerzos debido a la fricción (viscosos) están confinados o cobran gran importancia y en donde el flujo es *rotacional* $\vec{\nabla} \times \vec{U} \neq 0$. Esto quiere decir por fuera de la capa límite la viscosidad del fluido es inoperativa y el flujo es *irrotacional* $\vec{\nabla} \times \vec{U} = 0$.

Un *flujo a presión* o flujo interno es aquel que viaja por un conducto y ocupa toda su sección transversal (ver figura 1). El movimiento del flujo en el conducto se da por el gradiente de presión entre dos puntos en el conducto separadas una distancia L . Dicho gradiente se presenta gracias a la perdida de energía a lo largo de L debido a los esfuerzos de fricción y a la separación del flujo.

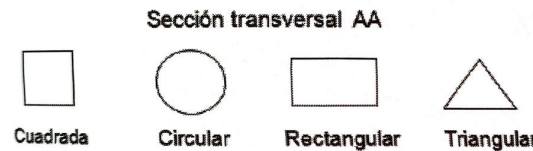


Figure 1: Tipos comunes de secciones transversales de tuberías (tomado de [2]).

Si se tiene un tanque grande del cual se conecta en la parte baja una tubería (ver figura 2), los esfuerzos viscosos empiezan a crecer una vez el fluido ingresa a la tubería y por tanto la capa límite (δ) también

empieza a crecer a lo largo de la tubería. La zona inicial es una zona de flujo ideal en donde los esfuerzos viscosos son despreciables y por lo tanto la velocidades son uniformes. Una vez, el flujo sale de zona inicial, la capa límite crece en una zona de *flujo no establecido* en donde se desarrollan los esfuerzos de corte. Es posible que cuando la entrada a la tubería no se hace a través de una transición suave, se presente separación del flujo de las paredes de la tubería generandose remolinos que viajan y desaparecen a lo largo de la zona de flujo no establecido y *presiones negativas* a velocidades muy altas. Una vez las capas límites alrededor y crecientes en dirección del flujo se encuentran es cuando se tiene un *flujo establecido* o flujo real gobernado por los esfuerzos de corte con una distribución no uniforme de velocidades.

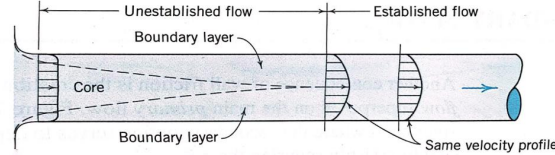


Figure 2: Desarrollo de la capa límite a lo largo de una tubería (tomado de [4]).

El mecanismo de crecimiento de la capa límite se puede describir como sigue. Cuando el fluido entra a la tubería se desarrollan altos valores de dv/dy , donde y es el eje vertical. Estos altos gradientes ocurren dentro de la capa límite y son debido a los esfuerzos debido a la fricción los cuales tratan de frenar el flujo. Dicha capa crece en la dirección del flujo hasta el punto en el que se encuentran. A partir de este punto de encuentro la acción de las fuerzas de fricción influncian el flujo y toda la sección es rotacional.

El flujo dentro de la capa límite puede ser laminar o turbulento. Si el numero de Reynolds $Re = \frac{Vd}{\nu}$, donde V es la velocidad media del flujo, d es el diámetro de la tubería y ν es la viscosidad cinemática, es $Re < 2100$, se puede inferir que el *flujo laminar establecido* resulta del crecimiento de la capa límite laminar. En este caso la longitud que toma el establecimiento de este flujo es $\frac{x}{d} \approx \frac{Re}{20}$. Si el Re aumenta levemente el flujo será laminar a lo largo de $\frac{x}{d} \approx \frac{Re}{20}$ y luego sera transisional antes de que el flujo este establecido. Si $Re \gg 2100$ la capa límite será turbulenta. Para Re altos, en casos prácticos se puede decir que la longitud x de la zona de flujo puede ser hasta $x \approx 100d$. Sin embargo, el flujo es establecido para valores mayores a $\frac{x}{d} \approx 20$. De acuerdo con esto, es posible notar que la energía en un flujo establecido disminuye a lo largo de la tubería. Note que la energía debido a la cabeza de presión disminuye a lo largo de la tubería debido a los esfuerzos de corte generados por la fricción dentro del flujo establecido (ver figura 3).

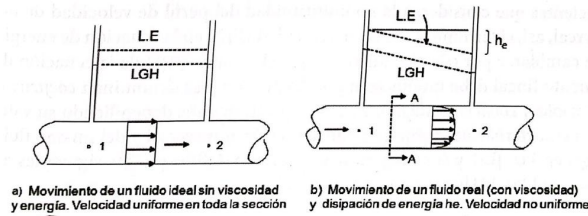


Figure 3: Línea de gradiente hidráulico (LGH) y de energía (LE) en un a) fluido ideal y en un b) fluido real (tomado de [2]).

3 Esfuerzo de corte y perdidas de cabeza de energía

Los esfuerzos de corte son producidos debido a la turbulencia del flujo o la viscosidad del fluido lo que con lleva a una resistencia al flujo que se traduce en perdidas de energía. Una pregunta clave, que se derivaría es ¿Cuales son los efectos de las fuerzas de fricción sobre la superficie de un volumen de control,

por ejemplo, en una tubería?. Para esto, analizaremos los esfuerzos de corte (τ) en un flujo 1D compresible y permanente a través de la tubería inclinada de la figura 4.

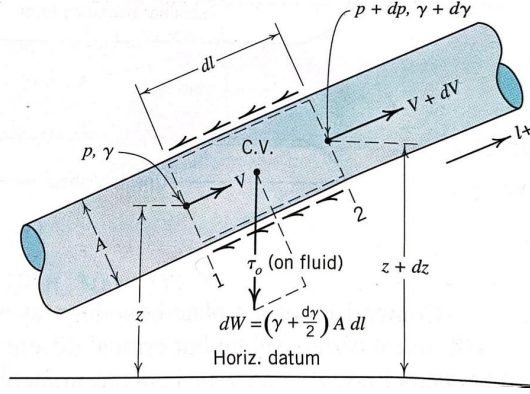


Figure 4: Fuerzas actuantes sobre el volumen de control en la tubería inclinada (tomado de [4]).

Aplicando la *ecuación de conservación de cantidad de movimiento lineal* para las fuerzas actuantes en la dirección del flujo sobre el volumen de control entre las secciones 1 y 2 en la figura 4, tenemos que las fuerzas fundamentales que actúan son las *fuerzas de presión*, las *fuerzas gravitacionales* y las *fuerzas viscosas*. Por esto se tiene:

$$pA - (p + dp)A - \tau_o P dl - \left(\gamma + \frac{d\gamma}{2} \right) A dl \frac{dz}{dl} = (V + dV)^2 A (\rho + d\rho) - V^2 A \rho \quad (9)$$

donde V es la velocidad del flujo, p es la presión en la sección, P es el perímetro de la sección, A es el área de la sección transversal, τ_o es el esfuerzo de corte en la superficie de control, dl es la longitud del volumen de control, dV es un cambio en la velocidad a través de dl , dz es la diferencia de alturas entre las secciones 1 y 2, ρ es la densidad del fluido, γ es el peso específico del fluido, $d\rho$ es un cambio de ρ a través de dl y $d\gamma$ es el cambio del peso específico a lo largo de dl . Note que $\left(\gamma + \frac{d\gamma}{2} \right) A dl \frac{dz}{dl} = dW \frac{dz}{dl}$, donde $dW \frac{dz}{dl}$ es el peso del fluido en el volumen de control en la dirección contraria del flujo, donde $\frac{dz}{dl} = \sin \theta$ y θ es el ángulo de inclinación de la tubería. Teniendo en cuenta que entre 1 y 2 los efectos de turbinas y bombas son despreciables, dividiendo por $A\gamma$, donde $\gamma = \rho g$ y despreciando los terminos que contengan productos de diferenciales, la ecuación 9 queda:

$$\frac{dp}{\gamma} + d \left(\frac{V^2}{2g} \right) + dz = - \frac{\tau_o dl}{\gamma R_h} \quad (10)$$

donde $R_h = \frac{A}{P}$ es el radio hidráulico de la sección. Para *flujo incompresible* en la tubería de la figura 4 y suponiendo que la tubería es de sección constante, significa que τ_o no es función de l y que γ es constante por lo que $d \left(\frac{1}{\gamma} \right) = 0$. Por lo tanto la ecuación 10 queda:

$$d \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right) = - \frac{\tau_o dl}{\gamma R_h} \quad (11)$$

Integrando la ecuación 11 entre las secciones 1 y 2 (note que al integrar de esa manera el signo de la función cambia), queda:

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \right) = \frac{\tau_o (l_2 - l_1)}{\gamma R_h} \quad (12)$$

Note que la diferencia de energía entre las secciones 1 y 2 (termino izquierdo de la ecuación 12) es la caída de energía entre las dos secciones, por lo que la ecuación 12 se expresa como:

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right) = \Delta(EL) = h_{L_{1-2}} \quad (13)$$

donde $\Delta(LE)$ es la caída de la línea de energía o la pérdida de energía entre 1 y 2 ($h_{L_{1-2}}$). Las pérdidas de energía se pueden expresar como:

$$h_{L_{1-2}} = \frac{\tau_o(l_2 - l_1)}{\gamma R_h} \quad (14)$$

Note que en la ecuación 14 quiere decir que las pérdidas de energía en el volumen de control son directamente proporcionales a la longitud del volumen de control y a los esfuerzos cortantes ejercidos por las paredes de la tubería sobre las paredes del volumen de control. Las pérdidas de energía son además inversamente proporcionales al radio hidráulico del volumen de control. Si la tubería es de sección circular de radio R , $R_h = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}$, la ecuación 14 quedaría:

$$h_{L_{1-2}} = \frac{2\tau_o(l_2 - l_1)}{\gamma r} \quad (15)$$

En términos generales, τ se puede expresar a partir de la ecuación 15:

$$\tau = \left(\frac{\gamma h_L}{2l}\right) r \quad (16)$$

donde r es una distancia radial y l es la longitud de la tubería. Note que τ varia linealmente con r (ver figura 5) donde $\tau_{max} = \tau_o$ se logra cuando $r = R$ (paredes de la tubería). Note que las ecuaciones anteriores fueron deducidas independiente si el flujo es laminar o turbulento.

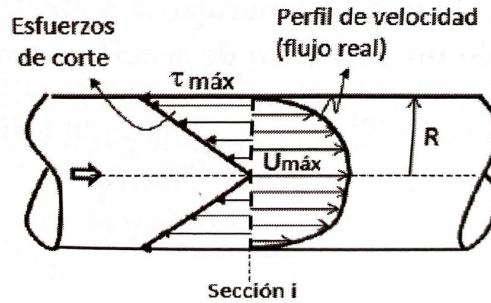


Figure 5: Perfil de velocidades y esfuerzos de corte (tomado de [2]).

Example 1. Agua fluye en un conducto rectangular de sección 0.9 m de ancho por 0.6 m de alto. La pérdida de cabeza de energía en este conducto de 60 m de longitud fue determinada experimentalmente e igual 10 m. a) Calcular el esfuerzo de corte en las paredes del conducto. Si el conducto es de sección circular de diámetro $D = 0.6m$, b) ¿cual es el esfuerzo cortante en las paredes? y c) ¿dentro del flujo en un punto a 200 mm de las paredes?

4 Experimentos de Reynolds

Osborne Reynolds en 1883 mediante un experimento el cual consistió en establecer un flujo de agua a través de una tubería de vidrio en el que la velocidad era controlada por una válvula a la salida de la tubería (ver figura 6). A la entrada de la tubería se inyecta una tinta que tiene un peso específico igual al del agua. Reynolds encontró que cuando la válvula está ligeramente abierta, las partículas de tinta se mueven de forma ordenada formando un filamento y a manera de capas que se deslizan una sobre otra sin mezclarse. Sin embargo, a medida que la válvula se va abriendo, se alcanza una condición en la cual la tinta presenta un movimiento fluctuante a medida que avanza en la tubería, en donde las partículas de la tinta se mueven caóticamente mezclándose. Al primer tipo de flujo se le llamo *laminar* y al segundo *turbulento*.

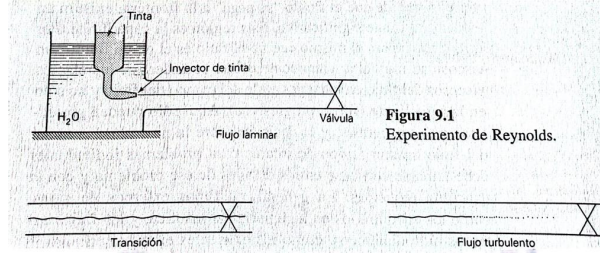


Figure 6: Experimento de Reynolds (tomado de [3]).

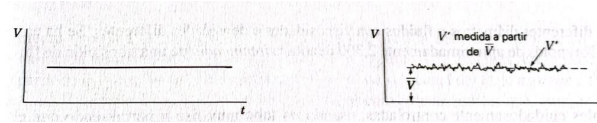


Figure 7: Velocidad para flujo laminar y flujo turbulento (tomado de [3]).

Reynolds encontró que el comportamiento de flujo se podía correlacionar con un parametro adimensional que relacionaba las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas, el cual es conocido como el *numero de Reynolds* (Re):

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{1.273Q}{\nu D} \quad (17)$$

donde D es el diámetro de la tubería.

Reynolds encontró que flujo laminar se obtenía para valores de $Re < 12000$, mientras que el flujo turbulento se lograba con $Re > 50000$. Sin embargo estos valores encontrados por Reynolds se obtuvieron para condiciones alejadas de lo que es un sistema de conducción real y que ocurren comunmente en ingeniería. Para propósitos prácticos en tuberías comerciales se ha encontrado que:

$$Re < 2100 \rightarrow \text{flujo laminar}$$

$$2100 < Re < 4000 \rightarrow \text{flujo de transición}$$

$$Re > 4000 \rightarrow \text{flujo de turbulento}$$

5 Flujo laminar

Se analiza primero el caso general de flujo permanente e incompresible entre placas paralelas e inclinadas a un ángulo θ , en donde la placa superior se mueve con una velocidad constante U (ver figura 8) y la

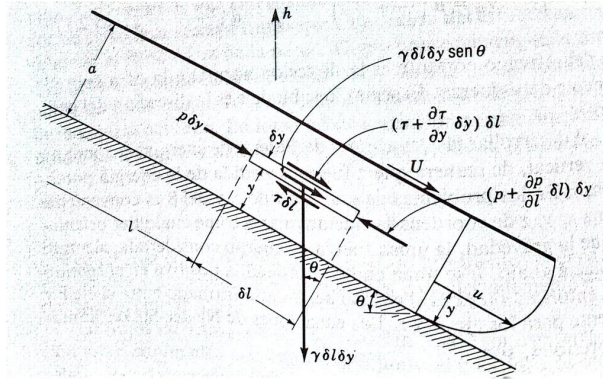


Figure 8: Flujo en movimiento entre placas paralelas con placa superior en movimiento (tomado de [5]).

velocidad del flujo es $u = f(y)$. Si analizamos las fuerzas actuantes sobre el elemento diferencial de fluido de ancho unitario, espesor δy y longitud δl de la figura 8, tenemos:

$$p\delta y - \left(p\delta y + \frac{\partial p}{\partial l}\delta l\delta y\right) - \tau\delta l + \left(\tau\delta l + \frac{\partial \tau}{\partial y}\delta y\delta l\right) + \gamma\delta l\delta y \sin \theta = 0 \quad (18)$$

donde p es la presión, γ es el peso específico del fluido y τ es el esfuerzo de corte. Simplificando la ecuación 18, dividiendo por el diferencial de volumen $\delta l\delta y$ y reemplazando $\sin \theta = -\frac{\partial h}{\partial l}$, se tiene:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial l}(p + \gamma h) \quad (19)$$

donde h es una distancia vertical positiva. Teniendo en cuenta que u y por lo tanto τ varían con respecto a y únicamente, $\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{d\tau}{dy}$. De manera similar, si $(p + \gamma h)$ no cambia en y (no hay aceleración en y), esta cambia en dirección de l , por lo tanto $\frac{\partial(p+\gamma h)}{\partial l} = \frac{d(p+\gamma h)}{dl}$. La ecuación queda:

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \quad (20)$$

De la *ley de viscosidad de Newton*, derivando τ con respecto a y , tenemos $\frac{d\tau}{dy} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$, e igualando con la ecuación 20, se tiene:

$$\frac{d\tau}{dy} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \quad (21)$$

Integrando la ecuación 21 con respecto a y , se tiene:

$$\mu \frac{du}{dy} = y \frac{d}{dl}(p + \gamma h) + A \quad (22)$$

Integrando la ecuación 22, queda:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h)y^2 + \frac{A}{\mu}y + B \quad (23)$$

donde A y B son constantes de integración. Si $u = 0$ (velocidad en la placa fija) para $y = 0$ y $u = U$ (velocidad de la placa móvil) para $y = a$, las constantes pueden ser encontradas resultando que $B = 0$ y que:

$$A = U\frac{\mu}{a} - \frac{a}{2} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \quad (24)$$

Reemplazando las constantes en la ecuación 23:

$$u = \frac{Uy}{a} - \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dl} (p + \gamma h)(ay - y^2) \quad (25)$$

Para el caso de placas horizontales, el gradiente debido a la presión o altura es constante $p + \gamma h = C$, por lo que, de la ecuación 25, la distribución de velocidades es $u = \frac{Uy}{a}$ (lineal). Para el caso en el que la placa superior es fija ($U = 0$), $u = -\frac{1}{2\mu} \frac{d}{dl} (p + \gamma h)(ay - y^2)$. Notese que la velocidad máxima es cuando $y = \frac{a}{2} - \frac{\mu U}{a \frac{d}{dl} (p + \gamma h)}$.

El caudal (Q) que pasa a través de una sección transversal (por unidad de ancho), se obtiene como:

$$Q = \int_0^a u dy = \left(U \frac{y^2}{2a} - \frac{1}{4\mu} \frac{d}{dl} (p + \gamma h) y^2 a + \frac{1}{6\mu} \frac{d}{dl} (p + \gamma h) y^3 \right) \Big|_0^a = \frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu} \frac{d}{dl} (p + \gamma h) a^3 \quad (26)$$

5.1 Flujo laminar en conductos y coronas

Supongamos que consideramos una tubería circular inclinada con flujo permanente (ver figura 9). Si se toma un anillo de flujo de espesor infinitesimal δr , las fuerzas actuantes en la dirección de flujo son:

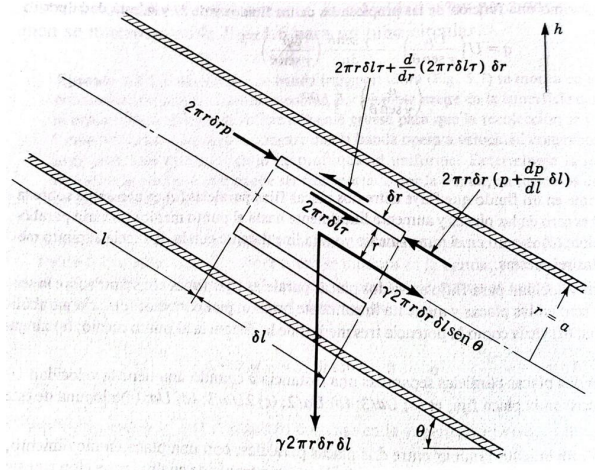


Figure 9: Diagrama de cuerpo de libre de un elemento cilíndrico para flujo laminar en un tubo circular inclinado (tomado de [5]).

$$2\pi r \delta r p - \left(2\pi r \delta r p + 2\pi r \delta r \frac{dp}{dl} \delta l \right) + 2\pi r \delta l \tau - \left[2\pi r \delta l \tau + \frac{d}{dr} (2\pi r \delta l \tau) \delta r \right] + \gamma 2\pi r \delta r \delta l \sin \theta = 0 \quad (27)$$

Teniendo en cuenta que $\sin \theta = -\frac{dh}{dl}$ y simplificando la ecuación 27, se tiene:

$$-2\pi r \delta r \frac{dp}{dl} \delta l - \frac{d}{dr} (2\pi r \delta l \tau) \delta r - \gamma 2\pi r \delta r \delta l \frac{dh}{dl} = 0 \quad (28)$$

dividiendo por el volumen del anillo $2\pi r \delta r \delta l$, se tiene que:

$$\frac{d}{dl} (p + \gamma h) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\tau r) = 0 \quad (29)$$

Teniendo en cuenta que $d(p + \gamma h)/dl$ no es una función de r y separando términos en la ecuación 29 para integrar con respecto a r :

$$\frac{d}{dl}(p + \gamma h)rdr + d(\tau r) = 0 \quad (30)$$

Integrando la ecuación 30, tenemos:

$$\frac{r^2}{2} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) + \tau r = A \quad (31)$$

donde A es una constante de integración. Reemplazando por $\tau = -\mu \frac{du}{dr}$ (note que el signo menos indica que du/dy es negativo ya que la velocidad decrece cuando r aumenta), reemplazando en la ecuación 31 tenemos:

$$\frac{r^2}{2} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) - \mu \frac{du}{dr} r = A \quad (32)$$

Separando términos para integración en la ecuación 32, se tiene:

$$du = \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h)rdr - \frac{A}{\mu} \frac{dr}{r} \quad (33)$$

integrando la ecuación 33, tenemos:

$$u = \frac{r^2}{4\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) - \frac{A}{\mu} \ln r + B \quad (34)$$

donde B es una constante de integración. Si se tiene una corona circular como la que se muestra en la figura 10, en donde la velocidad para el radio interior $r = b$ es $u = 0$ y donde la velocidad para el radio exterior $r = a$ es $u = 0$, las constantes de integración A y B en la ecuación 34 quedarían:

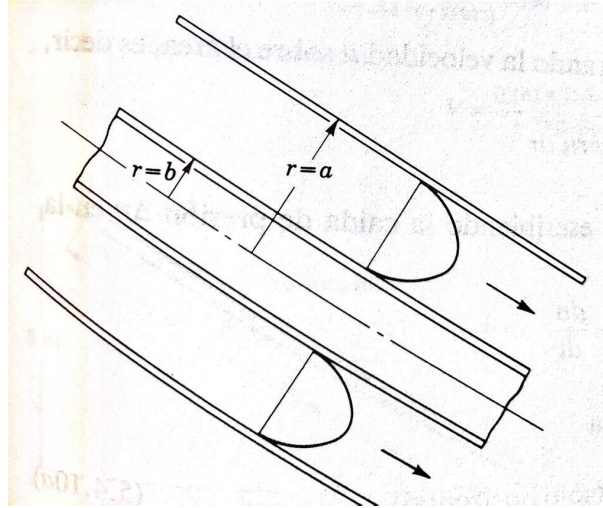


Figure 10: Flujo a través de un cilindro concéntrico (tomado de [5]).

$$B = \frac{A}{\mu} \ln a - \frac{a^2}{4\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \quad (35)$$

$$A = \frac{1}{4 \ln(a/b)} \frac{d}{dl}(p + \gamma h)(a^2 - b^2) \quad (36)$$

Reemplazando las constantes en la ecuación 34, se tiene una expresión para el perfil de velocidades en una corona circular:

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \left[a^2 - r^2 + \frac{a^2 - b^2}{\ln(b/a)} \ln \frac{a}{r} \right] \quad (37)$$

El caudal Q se calcula como:

$$\begin{aligned} Q &= \int_b^a 2\pi r u dr = \int_b^a -\frac{\pi r}{2\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \left[a^2 - r^2 + \frac{a^2 - b^2}{\ln(b/a)} \ln \frac{a}{r} \right] dr \\ &= -\frac{\pi}{2\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \int_b^a \left[r a^2 - r^3 + \frac{(a^2 - b^2)r}{\ln(b/a)} \ln \frac{a}{r} \right] dr \\ &= -\frac{\pi}{2\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \int_b^a \left[r a^2 - r^3 + \frac{(a^2 - b^2)}{\ln(b/a)} (r \ln a - r \ln r) \right] dr \end{aligned} \quad (38)$$

Note que el termino $r \ln r$ en la integral de la ecuación 38 se debe integrar por partes como $uv - \int v du$ ($u = \ln r$ y $dv = r$). Integrando la ecuación 38 y simplificando, se tiene:

$$Q = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \left[a^4 - b^4 - \frac{(a^2 - b^2)^2}{\ln(a/b)} \right] \quad (39)$$

5.2 Flujo laminar en tuberías circulares: ecuación de Hagen-Poiseuille

En un tubo circular, en la ecuación 34, $A = 0$ cuando $r = 0$. Por lo tanto, la ecuación 34 queda:

$$u = \frac{r^2}{4\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) + B \quad (40)$$

Si $u = 0$ cuando $r = a$, se tiene que $B = -\frac{a^2}{4\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h)$, reemplazando en la ecuación 40, se tiene:

$$u = \frac{r^2 - a^2}{4\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \quad (41)$$

La ecuación 41 representa la distribución de velocidades en una tubería circular, cuya forma es un paraboloide de revolución (ver figura 11).

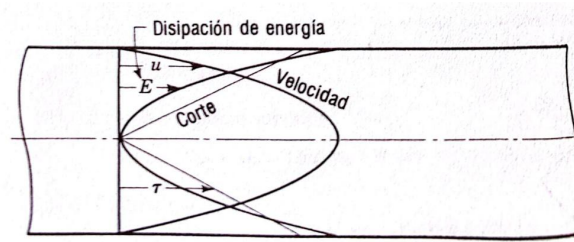


Figure 11: Distribución de velocidades y esfuerzos de corte en una tubería circular (tomado de [5]).

La velocidad máxima u_{max} ocurre cuando $r = 0$, por lo tanto de la ecuación 41 se tiene:

$$u_{max} = -\frac{a^2}{4\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \quad (42)$$

El caudal Q se calcula como:

$$Q = \int_0^a 2\pi r u dr = \frac{\pi}{2\mu} \frac{d}{dl} (p + \gamma h) \int_0^a (r^3 - ra^2) dr \quad (43)$$

Integrando la ecuación 43

$$Q = -\frac{\pi a^4}{8\mu} \frac{d}{dl} (p + \gamma h) \quad (44)$$

La *velocidad media* se define como $V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi a^2}$, que además es la mitad del paraboloide de revolución de velocidades (mitad de la velocidad máxima), de acuerdo con esto:

$$V = -\frac{a^2}{8\mu} \frac{d}{dl} (p + \gamma h) \quad (45)$$

Para un tubo horizontal de longitud L , h es constante, por lo tanto:

$$\frac{\Delta p}{L} = -\frac{dp}{dl} \quad (46)$$

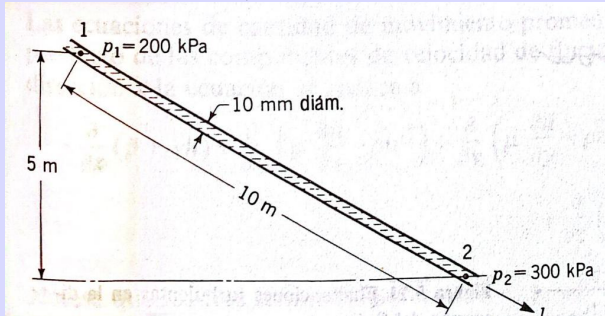
donde Δp es la caída de presión a lo largo de L . Para el caso de un tubo horizontal, Q se expresa en términos del diámetro D como:

$$Q = \frac{\Delta p \pi D^4}{128\mu L} \quad (47)$$

La ecuación anterior es conocida como la *ecuación de Hagen-Poiseuille*. La velocidad media a partir de la ecuación 47:

$$V = \frac{\Delta p D^2}{32\mu L} \quad (48)$$

Example 2. *Determinese la dirección de flujo del tubo mostrado en la figura en donde $\gamma = 8000 \text{ N/m}^3$ y $\mu = 0.04 \text{ kg/m.s}$. Además, encontrar el caudal en litros por segundo y el número de Reynolds.*



De la ecuación 47, despejando la caída de presión Δp para una tubería horizontal, la cual representa las *pérdidas por unidad de volumen* h_e , se tiene:

$$\Delta p = h_e = \frac{128\mu L Q}{\pi D^4} \quad (49)$$

El *factor de corrección de la energía cinética* α para flujo laminar en una tubería se calcula como:

$$\alpha = \frac{1}{A} \int \left(\frac{u}{V} \right)^3 dA \quad (50)$$

Reemplazando las ecuaciones 41 y 45 en la ecuación 50, tenemos:

$$\alpha = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \left\{ 2 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \right\}^3 2\pi r dr = 2 \quad (51)$$

Notese que la energía cinética es el doble de la energía si se considera una distribución real ($u = f(r)$) de velocidades. El *factor de corrección de la cantidad de movimiento* β , se expresa como:

$$\beta = \frac{1}{A} \int \left(\frac{u}{V} \right)^2 dA \quad (52)$$

Reemplazando las ecuaciones 41 y 45 en la ecuación 52, tenemos que $\beta = 4/3$.

6 Flujo turbulento

6.1 Esfuerzo de corte turbulento

En un flujo turbulento, las partículas de agua viajan de manera desordenada siguiendo trayectorias caóticas. Esto implica que las velocidades y las presiones fluctuen rápidamente en el tiempo. Esto implica que el análisis de las ecuaciones de Navier-Stokes sea difícil analíticamente, e incluso, numéricamente. Para esto es necesario expresar dichas cantidades en sus valores medios en el tiempo y en sus cantidades fluctuantes. Para la componente de la velocidad en x , u , esta se puede representar:

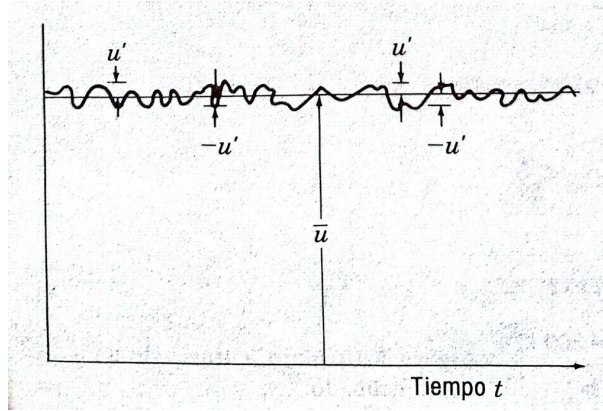


Figure 12: Velocidad en x para flujo turbulento (tomado de [5]).

$$u = \bar{u} + u' \quad (53)$$

donde \bar{u} es la velocidad media o promedio y u' es la fluctuación. Para un tiempo T , \bar{u} se expresa:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt \quad (54)$$

y el promedio de las fluctuaciones de u en T , se expresa como:

$$\overline{u'} = \frac{1}{T} \int_0^T (u - \bar{u}) dt = 0 \quad (55)$$

Nótese que el promedio de u' es cero para T . Sin embargo el cuadrado de las fluctuaciones:

$$\overline{u'^2} = \frac{1}{T} \int_0^T (u - \bar{u})^2 dt \neq 0 \quad (56)$$

es diferente de cero. Reynolds descompuso cada propiedad del flujo en su valor medio y su fluctuación:

$$v = \bar{v} + v' \quad w = \bar{w} + w' \quad p = \bar{p} + p' \quad (57)$$

Note que la raíz cuadrada de $\overline{u'^2}$ es una medida de la *intensidad de la turbulencia*. Tampoco es cero los productos medios de las fluctuaciones como $\overline{u'v'}$, $\overline{u'w'}$, etc.

De las ecuaciones de Navier-Stokes (ecuaciones 6, 7 y 8), la ecuación de cantidad de movimiento en x promediada en el tiempo, la cual contiene el producto de las componentes de fluctuación, se expresa como:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + \gamma h) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \rho \overline{u'w'} \right) = \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (58)$$

Los términos $-\rho \overline{u'^2}$, $-\rho \overline{u'v'}$ y $-\rho \overline{u'w'}$, representan la aceleración convectiva y matemáticamente son análogos al esfuerzo. Estos se denominan los *esfuerzos de Reynolds*. Note que los términos (e.g. $\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$) son los esfuerzos cortantes medios viscosos. Los esfuerzos de Reynolds son los responsables del intercambio de cantidad de movimiento y la capacidad de mezcla en un flujo turbulento. En un flujo turbulento los esfuerzos de Reynolds son superiores a los esfuerzos viscosos, mas aun, en la capa límite. Los esfuerzos de Reynolds se calculan empíricamente con ayuda de experimentos.

Para flujo en la dirección x , el esfuerzo turbulento mas importante es $-\rho \overline{u'v'}$, por lo que la ecuación 58 se convierte:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + \gamma h) + \frac{\partial \tau}{\partial y} \approx \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (59)$$

donde $\tau = \tau_l + \tau_t = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}$ es el esfuerzo de corte total, τ_l es el esfuerzo laminar y τ_t es el esfuerzo cortante turbulento.

6.2 Longitud de mezcla de Prandtl

El esfuerzo cortante aparente para flujo turbulento, incluyendo los efectos viscosos, se expresa como:

$$\tau = (\mu + \eta) \frac{du}{dy} \quad (60)$$

Prandtl encontró expresiones para determinar u' y v' en función de la *longitud de mezcla* l y el gradiente de velocidad $\frac{du}{dy}$ en donde u es la velocidad media temporal en un punto y y es la distancia normal a u medida desde la frontera (ver figura 13)

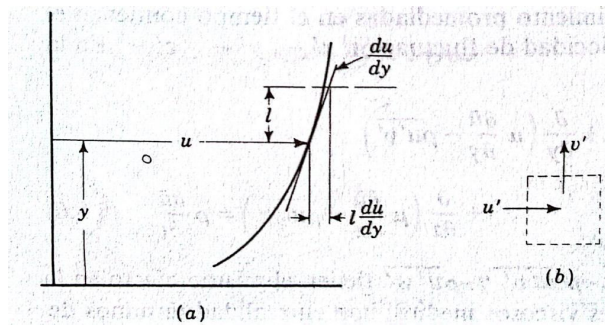


Figure 13: Esquema de la teoría de longitud de mezcla (tomado de [5]).

De la figura 13, l y u' se relacionan como:

$$u' \sim l \frac{du}{dy} \quad (61)$$

Esto significa que los cambios de la velocidad dependen de los cambios en la velocidad media temporal en dos punto separados por l , donde l es el tamaño promedio de los remolinos responsables de la mezcla. l es tambien la distancia recorrida por una partícula antes de que su cantidad de movimiento sea modificada. Teniendo en cuenta que u' y v' están correlacionados:

$$v' \sim u' \sim l \frac{du}{dy} \quad (62)$$

Reemplazando las expresiones de la ecuación 62 en $\tau_t = -\rho \overline{u'v'}$ (esfuerzo turbulento), se obtiene una ecuación que define la longitud de mezcla l :

$$\tau_t = \rho l^2 \left(\frac{du}{dl} \right)^2 \quad (63)$$

Note que l absorbe el factor de proporcionalidad y el signo.

Para flujo turbulento, se puede encontrar una expresión similar a la ley de viscosidad de Newton como:

$$\tau_t = \eta \frac{du}{dy} \quad (64)$$

donde η es la *viscosidad de remolino* que no es solo una propiedad del fluido ya que depende del movimiento de este y de su densidad, y generalmente es mayor μ . η también se considera como un coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento. Igualando las ecuaciones 63 y 64, se tiene:

$$\eta = \rho l^2 \frac{du}{dy} \quad (65)$$

Note que l cambia con respecto a la distancia a la pared y y se hace cero en la frontera. Von Karman a través del estudio de relaciones de similitud en flujo turbulento, encontró una relación para l como:

$$l = \kappa \frac{du/dy}{d^2u/dy^2} \quad (66)$$

donde κ es una constante universal (*constante de Von Karman*) en un flujo turbulento sin importar la configuración de la frontera o el número de Reynolds. Se ha encontrado que $\kappa \approx 0.40$.

6.3 Distribuciones de velocidad

En flujos de turbulentos, la distribución de velocidades en las zonas cercanas a la pared del conducto se puede dividir en tres capas (ver Figura 14): *Capa viscosa (o laminar), capa de traslape y zona turbulenta exterior*.

Capa laminar

En la capa viscosa mas cercana a la pared, el esfuerzo cortante es constante e igual al esfuerzo en la pared τ_0 . La distribución de velocidades en la capa viscosa se relaciona con la viscosidad absoluta y el esfuerzo cortante a partir de la ley de viscosidad de Newton y se expresa como:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \frac{u}{y} = \nu \frac{u}{y} \quad y \leq \delta' \quad (67)$$

donde δ' es el espesor de la capa viscosa de la pared.

Definiendo la *velocidad de esfuerzo de corte* (u^*) como $u^* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ y reemplazando en la ecuación 67, se tiene:

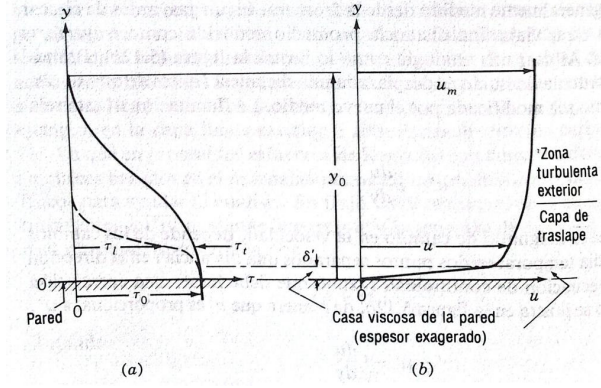


Figure 14: Para flujo turbulento en conductos a) distribución de esfuerzos y b) distribución de velocidades (tomado de [5]).

$$u^{*2} = \nu \frac{u}{y} \quad (68)$$

dividiendo por u e invirtiendo los términos en la ecuación 68, se tiene

$$\boxed{\frac{u}{u^*} = \frac{u^* y}{\nu}} \quad y \leq \delta' \quad (69)$$

La ecuación 69 muestra una relación lineal entre u y y en la capa viscosa (o laminar) y es conocida como la *ley de pared*. A través de experimentos, se ha encontrado que δ' :

$$\boxed{\delta' = 5 \frac{\nu}{u^*}} \quad (70)$$

En la practica, se ha encontrado que una superficie es hidráulicamente lisa si $\delta' > 6\varepsilon$ e hidráulicamente rugosa si $\delta' < 3\varepsilon$, donde ε es la rugosidad en unidades de L del material del conducto.

Capa de traslape

En la capa de traslape (ver figura 14), los esfuerzos turbulentos son dominantes mientras que el esfuerzo laminar puede ser despreciable. Por lo tanto el esfuerzo cortante turbulento τ_t (Ecuación 63) es aproximadamente igual al esfuerzo cortante en la pared τ_0

$$\tau_0 = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (71)$$

Von Karman encontró que la longitud de mezcla l en cercanía a la pared es proporcional a la distancia desde la pared y e igual $l \approx \kappa y$. Reemplazando l y $u^* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ en la ecuación 71, se tiene que:

$$\frac{du}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \frac{dy}{y} \quad (72)$$

integrando la ecuación 72:

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + A \quad (73)$$

donde A es una constante de integración. Si se reemplaza la expresión para u de la ecuación 73 en la ecuación 66, se tiene que l es proporcional a y (note que $\frac{d^2u}{dy^2}$ es negativo por que el gradiente de velocidad disminuye en la medida que y aumenta).

Para $y = \delta'$ se tiene que $u = u_w$ que es la velocidad en donde el flujo cambia de laminar a turbulento. Reemplazando en la ecuación 69, se tiene:

$$\frac{u_w}{u^*} = \frac{u^* \delta'}{\nu} = N \quad (74)$$

donde N es un número de Reynolds crítico cuando el flujo cambia de laminar a turbulento. Sustituyendo $u = u_w$ y $y = \delta'$ en la ecuación 73 para determinar el valor de A , se tiene que:

$$A = \frac{u_w}{u^*} - \frac{1}{\kappa} \ln \delta' = N - \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{N \nu}{u^*} \right) = N - \frac{1}{\kappa} (\ln N + \ln \nu - \ln u^*) \quad (75)$$

Reemplazando la ecuación 75 en la ecuación 73, se tiene:

$$\boxed{\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y u^*}{\nu} \right) + N - \frac{1}{\kappa} \ln N} \quad (76)$$

Nikuradse mediante experimentos de flujo turbulento para conductos con paredes lisas y graficando u/u^* vs $\ln(yu^*/\nu)$ encontró que la constante universal adimensional $\kappa = 0.40$ y $N - \frac{1}{\kappa} \ln N = 5.5$.

Zona turbulenta

En la zona turbulenta de la figura 14 para tuberías de radio r_0 y reemplazando $y = r_0$, para el cual la velocidad $u = u_m$ (en el centro de la tubería), en la ecuación 73, se tiene que la constante es:

$$A = \frac{u_m}{u^*} - \frac{1}{\kappa} \ln r_0 \quad (77)$$

Reemplazando en la ecuación 73:

$$\boxed{\frac{u_m - u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{r_0}{y}} \quad (78)$$

La ecuación 78 es conocida como la *ley del deficit de velocidad* y se aplica a conductos lisos y rugosos.

Para tubos rugosos, $y_w = m\epsilon'$, donde ϵ' es una altura típica de la rugosidad y m es un coeficiente de forma que depende de la naturaleza de la rugosidad, y la velocidad es u_w (velocidad donde el flujo cambia de laminar a turbulento), determinando el valor de la constante en la ecuación 73, se tiene:

$$A = \frac{u_w}{u^*} - \frac{1}{\kappa} (\ln m + \ln \epsilon') \quad (79)$$

reemplazando la ecuación 79 en la ecuación 73, se tiene:

$$\boxed{\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\epsilon'} + \frac{u_w}{u^*} - \frac{1}{\kappa} \ln m} \quad (80)$$

donde el termino $\frac{u_w}{u^*} - \frac{1}{\kappa} \ln m$ es una constante que depende del tipo de rugosidad. Nikuradse realizando experimentos con tuberías rugosas (granos de arena adheridos a las paredes de la tubería) y considerando que la rugosidad de la tubería ϵ' es igual al diámetro del grano de arena, encontró que $\kappa = 0.40$ y $\frac{u_w}{u^*} - \frac{1}{\kappa} \ln m = 8.48$.

Note que la *ley logarítmica* de la ecuación 76 es la que tiene la aplicación mas amplia. Fíjese que la capa viscosa es muy pequeña en flujos turbulentos.

Prandtl desarrolló una formula sencilla para la distribución exponencial de velocidad para flujo turbulento en tuberías:

$$\frac{u}{u_m} = \left(\frac{y}{r_0} \right)^n \quad (81)$$

donde n varia con el número de Reynolds. Esta ecuación empírica es valida solo para ciertas distancias de la pared. Para $R < 100000$, $n = 1/7$, para valores mayores de R , n decrece. Ambas ecuaciones 81 y 76 tienen la falla de predecir un valor $du/dy \neq 0$ en el centro de la tubería.

Example 3. Encuentrese una expresión aproximada para la distribución de longitud de mezclado en flujo turbulento en un tubo a partir de la ley exponencial de velocidad de Prandtl para $n = 1/7$.

Example 4. En un tubo circular de 14 cm diámetro fluye aire a una temperatura de $T = 20^\circ \text{C}$. Si el flujo esta completamente desarrollado, y la velocidad en el centro de la tubería es 5 m/s, determinar a) la velocidad de fricción u^* y b) el esfuerzo de corte en la pared. Asumir flujo turbulento y la ocurrencia de la ley logarítmica.

6.4 Pérdidas de energía

En flujos incompresibles y turbulentos a regimen permanente y uniforme en conductos cerrados de sección transversal constante, el esfuerzo cortante en la pared τ_0 se expresa como:

$$\tau_0 = \lambda \frac{\rho}{2} V^2 \quad (82)$$

donde λ es un coeficiente adimensional y V es la velocidad media. En conductos abiertos o cerrados no circulares, el esfuerzo cortante no es constante sobre la superficie por lo que τ_0 se calcula como el promedio de los esfuerzos cortantes sobre la pared.

Si se analizan las fuerzas actuantes sobre un volumen de control de flujo en un conducto abierto o cerrado (ver figura 15), la energía del flujo podría proporcionarse por la caída de energía potencial, así como por una caída en la presión $p_1 - p_2$.

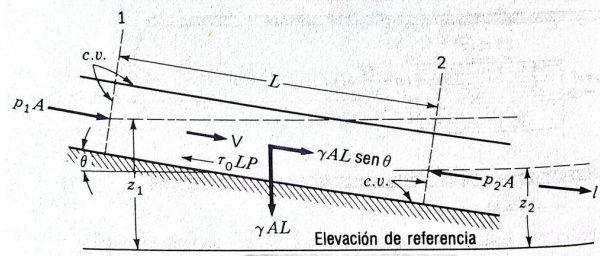


Figure 15: Fuerzas axiales sobre un volumen de control en un conducto (tomado de [5]).

Las pérdidas de energía entre dos secciones 1 y 2 en conductos se puede expresar usando la ecuación de energía a partir de la ecuación de la *ecuación de Bernoulli* (ecuación 2):

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{1-2} \quad (83)$$

donde h_{1-2} son las pérdidas de energía entre 1 y 2. Como la sección transversal en el conducto es constante, el termino $\frac{V^2}{2g}$ se elimina a ambos lados, por lo que las perdidas se expresan como:

$$h_{1-2} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 \quad (84)$$

Note que las pérdidas son proporcionales a los cambios en la cabeza de presión y en la energía potencial.

De acuerdo con la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento lineal para el volumen de control de la figura 15 en la dirección del flujo l , tenemos:

$$\sum F_l = 0 = (p_1 - p_2)A + \gamma AL \sin \theta - \tau_0 LP \quad (85)$$

donde L es la distancia entre 1 y 2, A es el área de la sección transversal en 1 y en 2, P es el *perímetro mojado* de la sección, el cual es la porción de la sección transversal en contacto con el fluido excluyendo la superficie libre. Teniendo en cuenta que $L \sin \theta = z_1 - z_2$, se tiene:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 = \frac{\tau_0 LP}{\gamma A} \quad (86)$$

Igualando las ecuaciones 84 y 86 y usando la ecuación 82, se tiene:

$$h_{1-2} = \frac{\tau_0 LP}{\gamma A} = \lambda \frac{\rho}{2} V^2 \frac{LP}{\gamma A} = \lambda \frac{L}{R} \frac{V^2}{2g} \quad (87)$$

donde R es el radio hidráulico del conducto $R = \frac{A}{P}$, para una tubería $R = \frac{D}{4}$ donde D es el diámetro del tubo. Note que el las perdidas de energía h_{1-2} tiene unidades de Newton-metro por newton o libras-pie por libra. Teniendo en cuenta que las pérdidas de cabeza de energía son debido a la fricción, $h_{1-2} = h_f$. Si se expresan h_f en términos de longitud, se tiene que la *pendiente de la línea de energía* S se expresa:

$$S = \frac{h_f}{L} = \frac{\lambda}{R} \frac{V^2}{2g} \quad (88)$$

Despejando la velocidad V de la ecuación 88:

$$V = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} \sqrt{RS} = C \sqrt{RS} \quad (89)$$

donde C es un coeficiente de fricción que depende de la rugosidad del material y del tamaño del conducto y se encuentra de manera experimental. La ecuación 89 es conocida como la *ecuación de Chezy* y C es el *coeficiente de Chezy*. Existen diferentes formulas para calcular C , para tuberías se tiene que $\lambda = f/4$, reemplazando en la ecuación 87, se tiene:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (90)$$

donde f es el *factor de fricción* que se ha determinado experimentalmente para tuberías. Esta ecuación es aplicable a conductos abiertos (canales) de la siguiente forma:

$$V = \sqrt{\frac{8g}{f}} \sqrt{RS} \quad (91)$$

6.5 Cálculo del factor de fricción

Al hacer un análisis del flujo turbulento, las variables que influyen en su comportamiento son: la velocidad media del flujo V [LT^{-1}], la viscosidad dinámica μ [$ML^{-1}T^{-1}$] o cinemática ν [L^2T^{-1}], la densidad del fluido ρ [ML^{-3}], el esfuerzo de corte en la pared τ_0 [$ML^{-1}T^{-2}$], una longitud característica L_c que para el caso específico de flujo en tuberías de sección transversal circular es igual a D [L] y la rugosidad absoluta del tubo ε [L]. De acuerdo con esto, podemos decir que en el flujo turbulento intervienen 6 variables y 3 dimensiones fundamentales: masa M , longitud L y tiempo T . Utilizando el *teorema Pi de Buckingham* y el análisis dimensional se puede obtener una ecuación que relacione estas 6 variables: $f(\tau_0, \rho, \mu, \nu, D, V, \varepsilon) = 0$. De acuerdo con el teorema, si el número de variables $n = 6$ y el número de dimensiones $m = 3$, el número de parámetros adimensionales es $n - m = 3$. Aplicando el teorema y tomando como variables repetitivas ε , ρ y V , los parámetros adimensionales son:

$$\Pi_1 = \frac{\rho V D}{\mu} = Re \quad \Pi_2 = \frac{\rho V^2}{\tau_0} = E \quad \Pi_3 = \frac{\varepsilon}{D} \quad (92)$$

donde E es el *número de Euler*. De acuerdo con lo anterior, $f(Re, E, \varepsilon/D) = 0$ o $\frac{\rho V^2}{\tau_0} = f(Re, \varepsilon/D)$. Despejando τ_0 , se tiene:

$$\tau_0 = \rho V^2 \left[f \left(Re, \frac{\varepsilon}{D} \right) \right] \quad (93)$$

Note que al despejar $f \left(Re, \frac{\varepsilon}{D} \right)^{-1}$ es equivalente a $f \left(Re, \frac{\varepsilon}{D} \right)$ ya que f es función de variables adimensionales. De la ecuación 87, $\tau_0 = \frac{h_f \gamma R}{L} = \frac{h_f \rho g D}{4L}$ igualando esta expresión a la ecuación 93 y simplificando, se tiene:

$$h_f = \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \left[8f \left(Re, \frac{\varepsilon}{D} \right) \right] \quad (94)$$

Note que el término entre paréntesis en la ecuación 94 es una función de Re y ε/D , es el factor de fricción (ver ecuación 90), por lo que la ecuación 94 se convierte en:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (95)$$

la cual es conocida como la *ecuación de Darcy-Weisbach*. Esta ecuación se puede aplicar al flujo laminar y al flujo turbulento, sin embargo, el factor de fricción en flujo turbulento depende no solo de Re si no de la rugosidad ε del contorno.

Existen diferentes ecuaciones para definir el valor del coeficiente de fricción dependiendo de si la superficie del conducto es lisa o rugosa. Estas ecuaciones han sido derivadas de análisis experimentales por diferentes investigadores como Blasius, Prandtl, Von Karman, Nikuradse, Jain, etc.

Blasius encontró que, para superficies hidráulicamente lisas y flujo turbulento en el rango $4000 < Re < 100000$, f se calcula como:

$$f = \frac{0.316}{Re^{0.25}} \quad (96)$$

Nikuradse realizó experimentos usando tres tuberías con diferente diámetro a las cuales les adhería uniformemente granos de arena de diferente diámetro (ε). Nikuradse encontró (ver figura 16) que cuando la rugosidad relativa ε/D variaba desde 0.001 hasta 0.033, f presentaba un comportamiento complejo que dependía del número de Reynolds y de la condición hidrodinámica del contorno. De los experimentos de Nikuradse, se encontró:

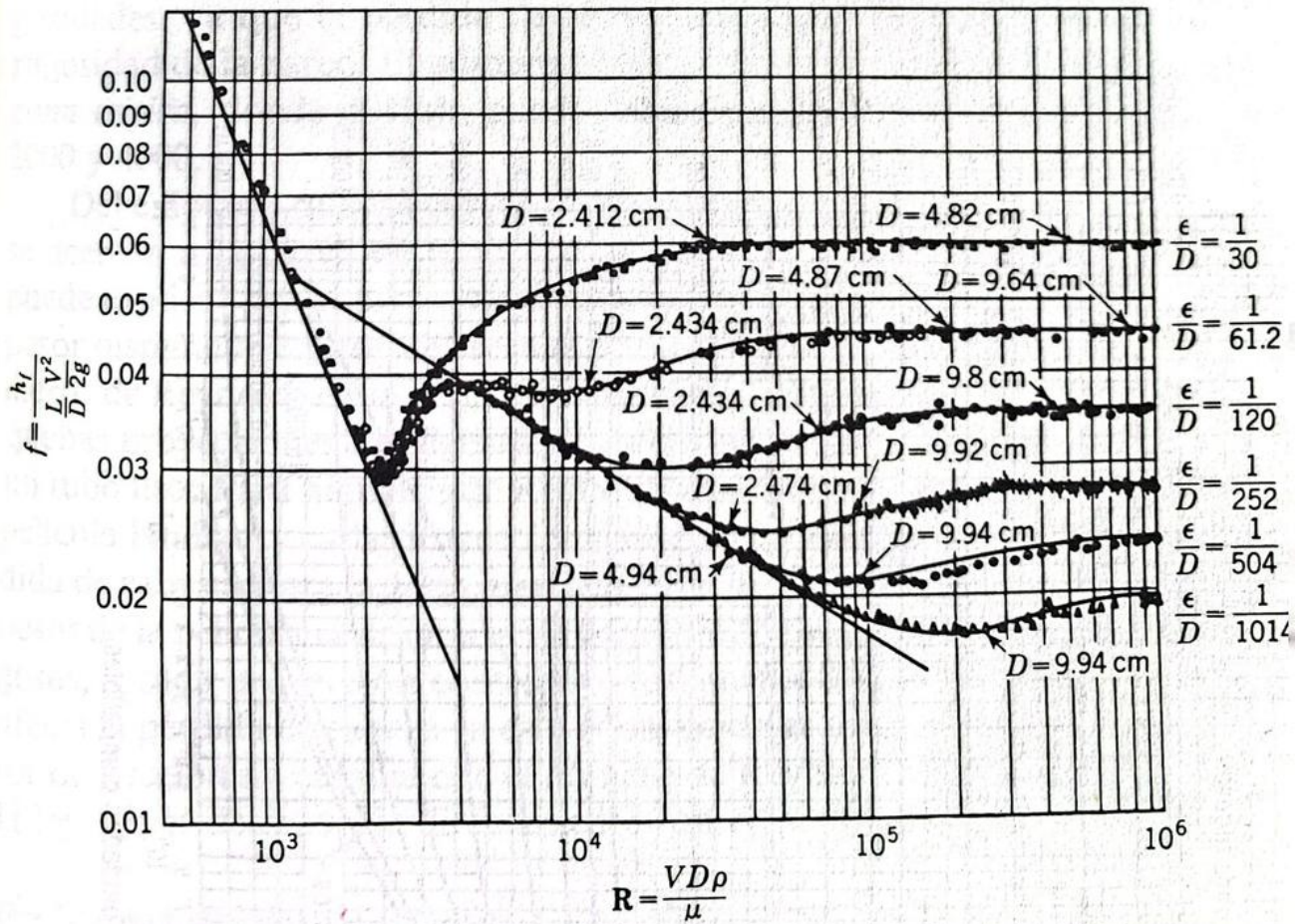


Figure 16: Experimentos de Nikuradse con tubos con rugosidades formadas con diferentes diámetros de arena (tomado de [5]).

- Para flujo laminare ($Re < 2100$) los datos experimentales definen una línea que satisface la ecuación 95, donde:

$$f = \frac{64}{Re} \quad (97)$$

- Para flujo turbulento ($Re > 4000$), los datos experimentales muestran una serie de curvas (ver figura 16) definidas por ϵ/D , por lo que f es una función de Re y de la rugosidad del tubo. En esas curvas se pueden definir tres zonas:
 1. Una primera zona definida por una curva envolvente para superficies lisas ($\delta > \epsilon$), por lo que f es independiente de la rugosidad.
 2. Una segunda zona en donde las curvas de f vs Re son paralelas para diferentes valores de ϵ/D , lo que evidencia que f es independiente de Re ; si Re aumenta el valor de f permanece constante. Esta zona define las superficies hidráulicamente rugosas y es conocida como la *zona totalmente rugosa*. El espesor de la capa viscosa δ' disminuye a medida que incrementa Re .
 3. Una tercera zona que define las superficies lisas (envolvente inferior). Se conoce como *zona rugosa de transición*.

Teniendo en cuenta el comportamiento de f , Prandtl y Von Karman presentaron las siguientes ecuaciones las cuales se ajustan muy bien a los datos experimentales obtenidos por Nikuradse:

- Para $Re > 4000$ y tuberías lisas

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.869 \ln \left(Re \sqrt{f} \right) - 0.8 \quad (98)$$

- Para $Re > 4000$ y tuberías rugosas

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 - 0.869 \ln \left(\frac{\varepsilon}{D} \right) \quad (99)$$

Sin embargo, teniendo en cuenta que los experimentos de Nikuradse se realizaron para tuberías con granos de arena adheridos uniformemente a las paredes de la tubería, dicha condición dista mucho de la realidad en donde ni la rugosidad ni el diámetro son uniformes. Para estudiar el comportamiento en tuberías comerciales en donde la rugosidad es irregular, C.F. Colebrook(1939), realizó experimentos con el propósito de mostrar la aplicabilidad de las ecuaciones 98 y 99. Colebrook obtuvo que en la zona de transición, existe un efecto de la no uniformidad de la rugosidad ε . Para tuberías comerciales de sección circular, Colebrook obtuvo una ecuación implícita para f para la zona de transición:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.52}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (100)$$

En términos de caudal Q , $Re = \frac{QD}{A\nu} = \frac{4Q}{\pi D\nu}$, la ecuación 100 se expresa como:

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{1.979\nu D}{Q \sqrt{f}} \right) \right]^{-2} \quad (101)$$

L.F. Moody presentó un diagrama (ver figura 18) para determinar el factor de fricción f en tuberías comerciales para flujos laminares y turbulento con base en las ecuaciones 96, 98, 99 y 100. El *diagrama de Moody* sirve para determinar f en función de Re y ε/D . EL diagrama presenta una serie de curvas que definen el comportamiento de flujo: laminar ($Re < 2100$, línea recta con pendiente -1) de transición y turbulento ($Re > 4000$). La zona de flujo turbulento esta compuesta por tres zonas: superficies hidráulicamente lisas en donde f depende solamente de Re , superficies en transición de lisas a rugosas donde f depende de Re y de ε/D y superficie hidráulicamente rugosa donde f depende de ε/D solamente.

El diagrama de Moody también puede ser utilizado en flujo a superficie libre (e.g. canales) utilizando el radio hidráulico R en lugar del diámetro D .

En 1976, Swamee y Jain presentaron una ecuación explícita para el factor f como:

$$f = 0.25 \left[\log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^{-2} \quad (102)$$

Esta ecuación es valida para los siguientes rangos de número de Reynolds y de rugosidad relativa ε/D : $4000 < Re < 1 \times 10^8$ y $0.01 < \varepsilon/D < 1 \times 10^{-4}$.

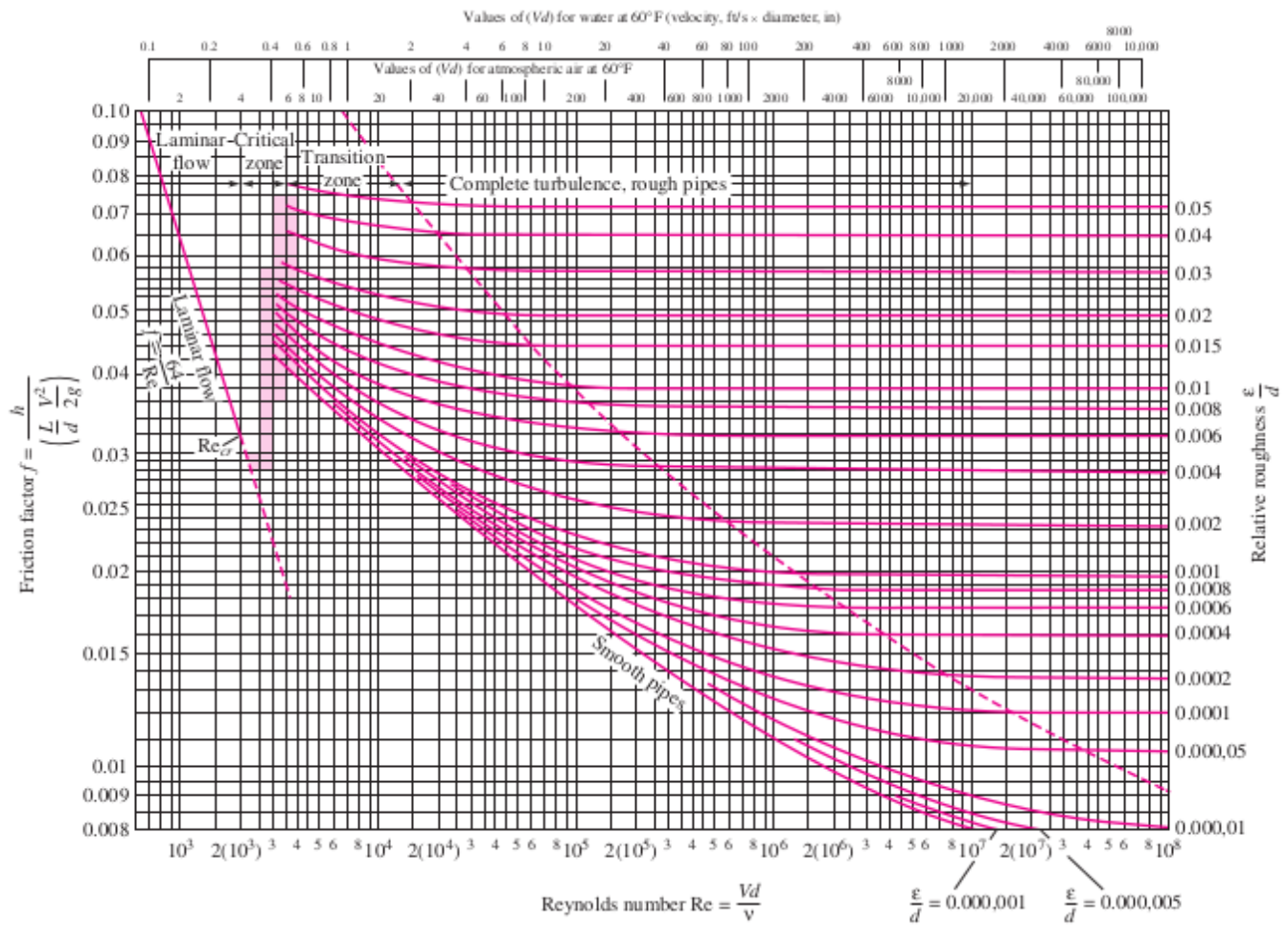


Figure 17: Diagrama de Moody para tuberías comerciales con flujo laminar y turbulento (tomado de [?]).

Example 5. Fluye petróleo ($S = 0.8$, $\mu = 0.0052 \text{ Pa}\cdot\text{s}$) a través de una tubería de 10 cm de diámetro y rugosidad $\epsilon = 0.85 \text{ mm}$ a razón de 40 l/s. Determinar la disipación de energía por unidad de longitud en la tubería y el esfuerzo de corte en la pared del conducto. Encontrar la magnitud de la velocidad a una distancia radial de 2 cm desde el centro de la tubería. Definir si la superficie se comporta como hidráulicamente lisa, en transición o rugosa.

Example 6. Agua a 60°F ($\rho = 62.36 \text{ lbm/ft}^3$ y $\mu = 7.536 \times 10^{-4} \text{ lbm/ft}\cdot\text{s}$) fluye a través de una tubería de acero ($\epsilon = 7 \times 10^{-6} \text{ ft}$) horizontal de 2 in de diámetro y longitud 200 ft con un caudal $0.2 \text{ ft}^3/\text{s}$. Determinar la caída de la cabeza de presión, la pérdida de energía y la potencia requerida para bombear agua a través de la tubería.

Rugosidad promedio de tubos comerciales

Material (nuevo)	<i>e</i>	
	pies	mm
Vidrio	0.000001	0.0003
Tubería estirada	0.000005	0.0015
Acero, hierro forjado	0.00015	0.046
Hierro fundido asfaltado	0.0004	0.12
Hierro galvanizado	0.0005	0.15
Hierro fundido	0.00085	0.26
Madera cepillada	0.0006–0.003	0.18–0.9
Concreto	0.001–0.01	0.3–3.0
Acero remachado	0.003–0.03	0.9–9.0

Figure 18: Rugosidades (ε) para tuberías comerciales (tomado de [?]).

6.6 Otras ecuaciones para calcular las pérdidas de energía

Ecuación de Hazen-Williams

Hazen y Williams presentaron la siguiente expresión para la velocidad media del agua en régimen turbulento:

$$V = 0.85 C_H R^{0.63} S_f^{0.54} \quad (103)$$

donde V es la velocidad media en m/s, C_H es un coeficiente de rugosidad que depende del material de la tubería (ver tabla 1), R es el radio hidráulico en m y S_f es la pendiente de la línea de energía $S_f = h_f/L$, donde L es la longitud en m.

Teniendo en cuenta que para tuberías de sección circular donde $R = D/4$, la ecuación 103 se puede expresar en términos de h_f como:

$$h_f = 10.654 L \left[\frac{Q}{C_H D^{2.63}} \right]^{1.85} \quad (104)$$

donde Q es el caudal a través del conducto en m³/s.

Ecuación de Manning

Robert Manning en 1880 obtuvo una expresión en el sistema Inglés de unidades para determinar la velocidad media del agua en tuberías:

Material del conducto	C_H
PVC	150
Fundición asfaltada	140
Eternit - Asbesto - Cemento	140
Acero	130–140
Hierro Forjado	130–140
Fundición	130
Hormigón	120
Acero liso	120
Madera	120
Fibra de vidrio	110

Table 1: Coeficientes de rugosidad de Hazen-Williams, C_H (tomado de [2]).

$$V = \frac{1.49}{\eta} R^{\frac{2}{3}} S_f^{\frac{1}{2}} \quad (105)$$

donde η es un coeficiente de rugosidad que depende del material del conducto y de las propiedades hidráulicas del flujo. Despejando de la ecuación 105 las pérdida de energía h_f y expresandola en sistema internacional, se tiene:

$$h_f = \frac{10.29 L \eta^2 Q^2}{D^{16/3}} \quad (106)$$

Al observar las ecuaciones 104 y 106, se puede afirmar que la disipación o pérdida de energía se puede expresar de manera general como:

$$h_f = C Q^n \quad (107)$$

donde C es una constante que depende de un sistema de unidades, longitud, diámetro y rugosidad del conducto, y el exponente n varía entre 1.0 y 2.0 depende del régimen de flujo. La tabla 2 define el valor de C y de n en la ecuación 107 para el sistema Internacional y para el sistema Inglés de unidades.

	Sistema Internacional	Sistema Inglés
	L(m), D(m), Q(m ³ /s)	L(pie), D(pie), Q(pie ³ /s)
Ecuación de Darcy-Weisbach (n=2)	$C = 0.0827 f \frac{L}{D^5}$	$C = 0.0252 f \frac{L}{D^5}$
Ecuación de Hazen-Williams (n=1.85)	$C = 10.654 L \left[\frac{1}{C_H D^{2.63}} \right]^{1.85}$	$C = 4.72 L \left[\frac{1}{C_H D^{2.63}} \right]^{1.85}$

Table 2: Ecuaciones para la disipación de energía $h_f = C Q^n$ (tomado de [2]).

7 Pérdidas menores

En un sistema de tuberías, el flujo pasa a través de múltiples *entradas, salidas, uniones, válvulas, codos, bifurcaciones, expansiones, contracciones, etc* (ver figura 19) en adición de los tramos rectos de las tuberías. Estos componentes del sistema causan separación y mezcla del flujo induciendo pérdidas de energía adicional. Comparadas con las pérdidas por fricción, h_f , las pérdidas debido a estos accesorios, h_e , son menores. Sin embargo, en algunos casos en donde existen muchos cambios de dirección y válvulas en un tramo corto de tubería, h_e llega a ser mayor que h_f . Cuando una válvula está totalmente abierta la pérdida de energía a través de esta son despreciable. Sin embargo cuando la válvula está parcialmente abierta,

existen pérdidas de energía debido a la disminución de caudal, como consecuencia de la disminución de presión, a través de la válvula.

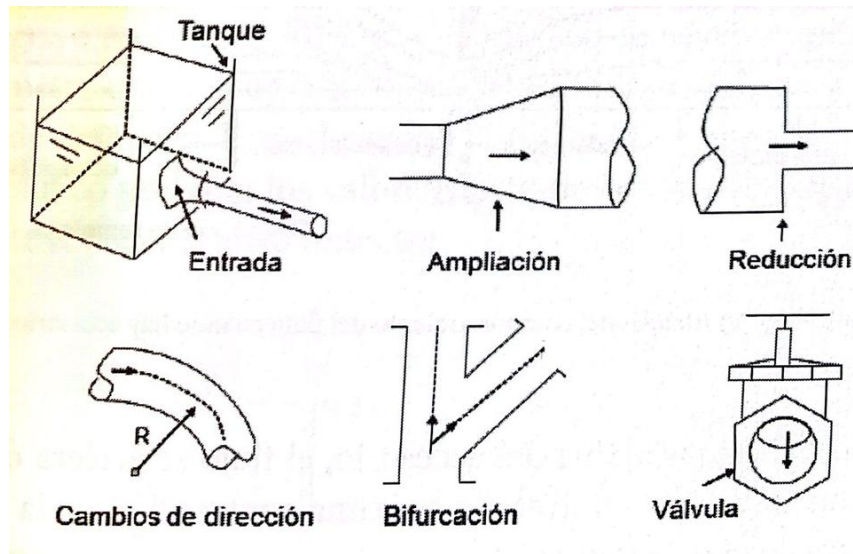


Figure 19: Accesorios de uso común en tuberías (tomado de [2]).

Hay muchas clases de válvulas usadas comercialmente (ver figura 20): la *válvula de compuerta* la cual se desliza hacia abajo en la sección, la *válvula de globo* la cual obtura un agujero usando un mecanismo especial, la *válvula de ángulo* la cual es similar a la de globo pero sobre un ángulo de 90° , la *válvula de cheque* la cual permite flujo en una sola dirección y la *válvula de disco* la cual cierra la sección transversal con una compuerta circular. La válvula de globo debido a su configuración interna es usualmente la que genera mayores pérdidas cuando esta totalmente abierta. Existen también las *válvula de mariposa* la cual consiste en un disco que gira y obtura la sección transversal dependiendo del ángulo de rotación (ver figuraaacce01). Las pérdidas en válvulas están dadas por el fabricante y dependen de su grado de apertura. La figura 22 muestra una curva del coeficiente de pérdidas K en función de la relación apertura (h) diámetro (D).

La cuantificación de las pérdidas menores es complejo desde el punto de vista teórico. Por esto, estas pérdidas son determinadas experimentalmente por los fabricantes de los accesorios. Las pérdidas menores, h_e , son expresadas usualmente como:

$$h_e = K \frac{V^2}{2g} \quad (108)$$

donde K es el *coeficiente de pérdida o de resistencia* que depende del número de Reynolds, del material del cual está hecho el accesorio y de la forma como se acopla el accesorio. Sin embargo, para $Re > 10^5$ se ha demostrado que K es independiente del número de Reynolds.

Vennard-Street explican físicamente el efecto de un accesorio sobre la energía disponible en el sistema y sobre el flujo. Dichos efectos se analizan mediante la figura 23:

- **Zona BC:** Aguas arriba del accesorio, la vena líquida se contrae y el flujo se acelera. La máxima contracción de la vena líquida se presenta justo en la posición del accesorio o un poco aguas abajo de este. Debido a la contracción, la presión disminuye.
- **Zona DE:** En esta zona la presión del flujo aumenta ya que la velocidad del flujo disminuye. El flujo se desacelera generando la creación de remolinos que ocasionan una turbulencia de gran escala. Por lo tanto una parte de la energía se pierde debido a la creación de remolinos.

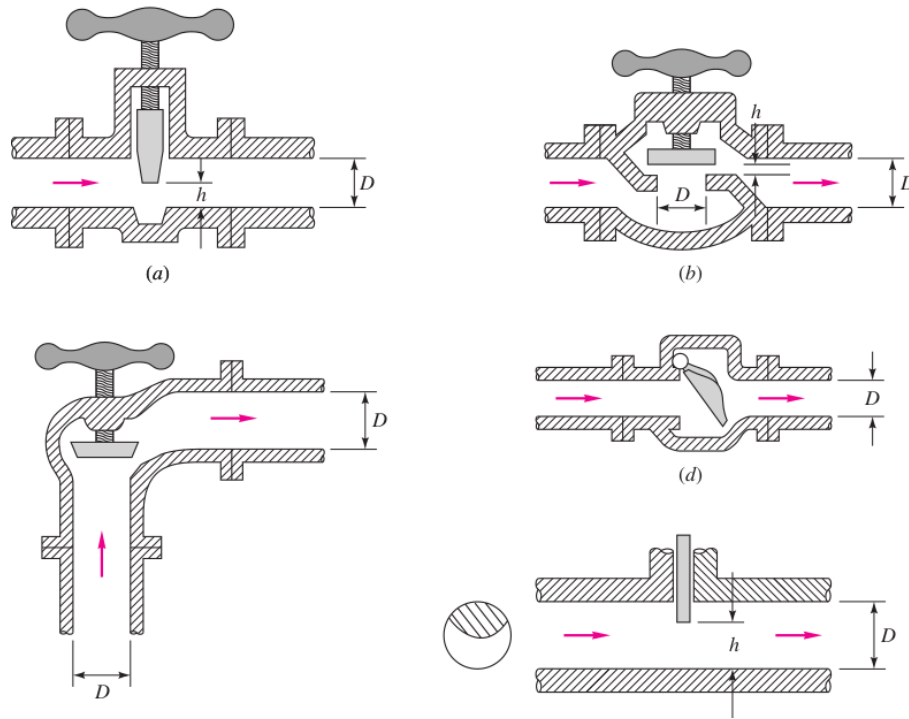


Figure 20: Válvulas comerciales típicas: a) válvula de compuerta, b) válvula de globo, c) válvula de ángulo, d) válvula de cheque y e) válvula de disco (tomado de [6]).

- **Zona EF:** En esta zona se disipan (desaparecen) los remolinos. Aguas abajo de esta zona se restablece la condición de flujo desarrollado.

Note que a lo largo de la longitud AG (ver figura 23) también actúan las fuerzas de fricción. Dichas pérdidas debido a la fricción se calculan asumiendo flujo desarrollado a lo largo de AG. Las pérdidas globales a lo largo de AG son entonces la suma de las pérdidas debido al accesorio (pérdidas locales entre C y D) y debido a la fricción (a lo largo de AG). Las *pérdida total* de energía en un sistema puede expresarse como:

$$h_T = \sum_i h_{f_i} + \sum_j h_{e_j} = \sum_i f_i \frac{L_i}{D_i} \frac{V_i^2}{2g} + \sum_j K_j \frac{V_j^2}{2g} \quad (109)$$

donde i representa cada tubería con diámetro constante y j representa cada componente que causa una pérdida menor. Si el sistema analizado tiene diámetro constante y del mismo material, la ecuación 109, se convierte en:

$$h_T = \left(f \frac{L}{D} + \sum_j K_j \right) \frac{V^2}{2g} \quad (110)$$

donde V es la velocidad media en todo el sistema.

Los sistemas de tuberías comunmente contienen *contracciones o expansiones subitas o graduales* de la sección de la tubería con el fin de acomodar cambios de caudal o velocidad o de propiedades del fluido (e.g. densidad). Las pérdidas son usualmente mayores cuando los cambios son súbitos o con un ángulo grande debido a la separación del flujo (ver figura 24).

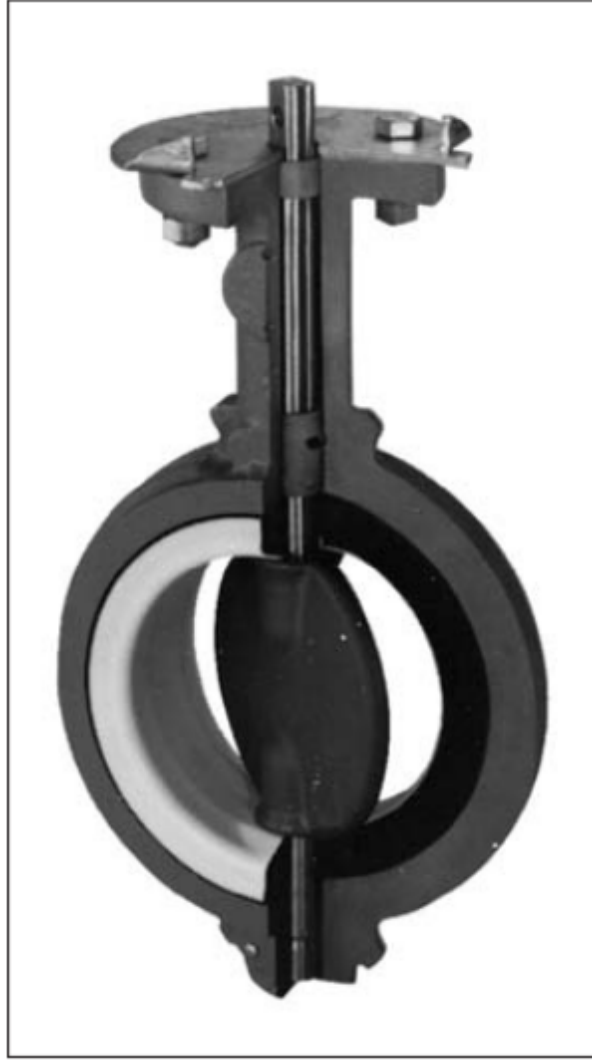


Figure 21: Válvula de mariposa (tomado de [6]).

Aplicando la ley de conservación de cantidad de movimiento para el volumen de control en la figura 24 entre las sección 1 y 2, tenemos:

$$p_1 A_2 - p_2 A_2 = \rho V_2 (V_2 A_2) + \rho V_1 (-V_1 A_1) \quad (111)$$

teniendo en cuenta que de acuerdo con la ley de continuidad $V_1 A_1 = V_2 A_2$, y despejando $\frac{p_1 - p_2}{\gamma}$ de la ecuación 111, se tiene que:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{V_2^2 - V_2 V_1}{g} \quad (112)$$

Aplicando la ley de conservación de la energía entre las secciones 1 y 2 en la figura 24, se tiene:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_e \quad (113)$$

despejando $\frac{p_1 - p_2}{\gamma}$ de la ecuación 113 e igualando a la ecuación 112, se tiene:

$$\frac{V_2^2 - V_2 V_1}{g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + h_e \quad (114)$$

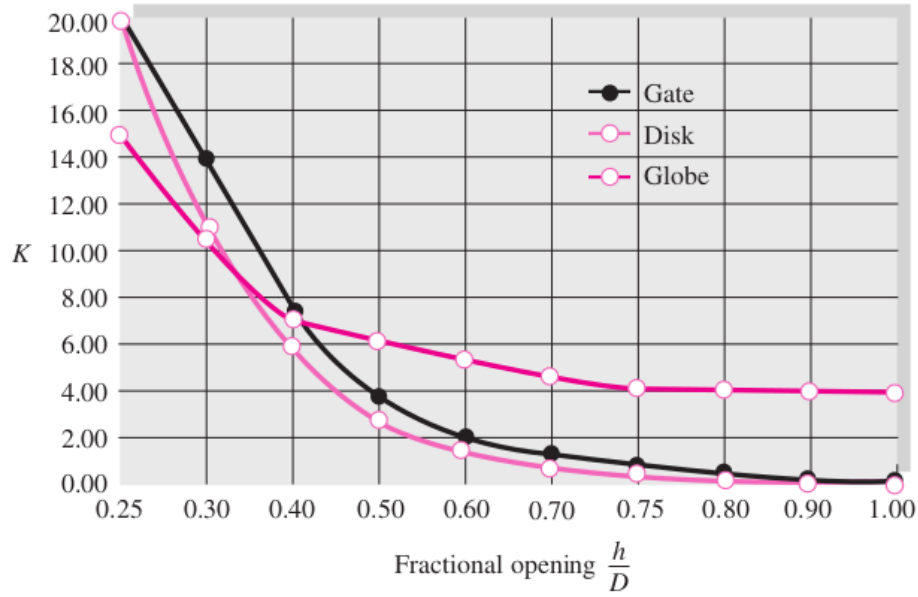


Figure 22: Coeficientes K promedio para válvulas parcialmente abiertas. (tomado de [6]).

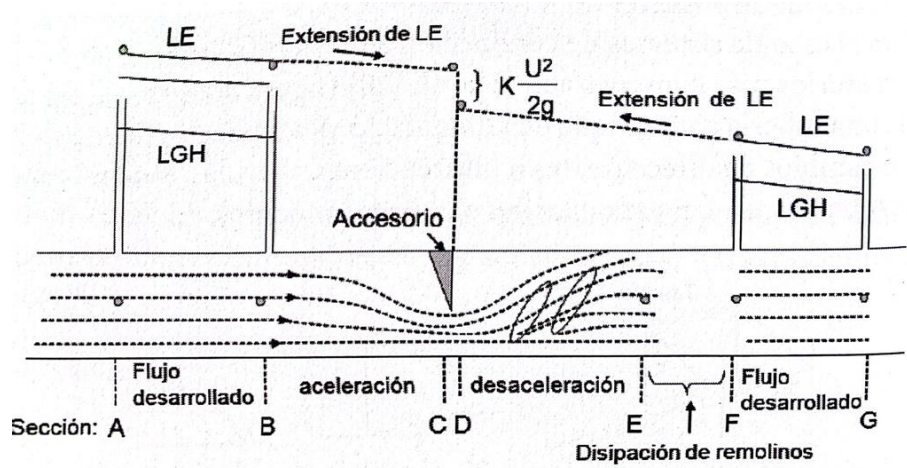


Figure 23: Comportamiento del flujo en una tubería con accesorio (tomado de [2]).

despejando h_e de la ecuación 114 y usando la ecuación de continuidad, se tiene:

$$h_e = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \frac{V_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \quad (115)$$

La ecuación 115 determina la pérdidas locales en una expansión brusca, por lo que:

$$K = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \quad (116)$$

Note que la ecuación 115 representa la deducción de una expresión para calcular las pérdidas menores en términos generales teniendo en cuenta que afirma que las pérdidas menores varían con el cuadrado de la velocidad afectada por un coeficiente K , que como lo habíamos afirmado, está dado generalmente por el fabricante.

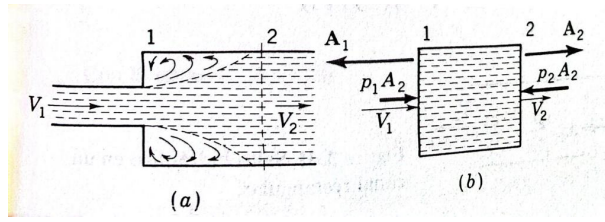


Figure 24: Representación de la pérdida de energía en una expansión subita. (tomado de [5]).

Analizando la ecuación 116, en el caso en que la tubería descargue a un deposito ($A_1 \ll A_2$), $K \approx 1$ lo que significa que la energía cinética del flujo se convierte en energía térmica (calor).

Para el caso de la contracción brusca que se muestra en la figura 25, se hace un análisis similar al realizado para el caso de la expansión brusca. Partiendo de la ecuación 115, se tiene:

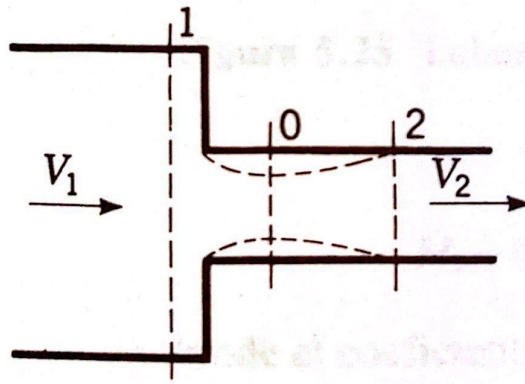


Figure 25: Contracción brusca en una tubería (tomado de [5]).

$$h_e = \frac{(V_0 - V_2)^2}{2g} \quad (117)$$

Teniendo en cuenta la vena líquida contraída en la sección 0, la ecuación de continuidad entre 0 y 2 es $V_0 C_c A_2 = V_2 A_2$ en donde C_c es un coeficiente de contracción que fue determinado inicialmente por Weisbach con respecto a la relación A_2/A_1 . Reemplazando en la ecuación 117, se tiene:

$$h_e = \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \frac{V_2^2}{2g} = K \frac{V_2^2}{2g} \quad (118)$$

En las figuras 26 y 27 se presentan valores de K para diferentes tipos de accesorios.

7.1 Longitud equivalente

Las pérdidas menores se pueden expresar en términos de la longitud equivalente L_e de tubo con la misma pérdida de cabeza para el mismo caudal así:

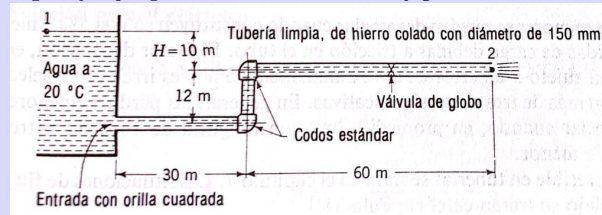
$$f \frac{L_e}{D} \frac{V^2}{2g} = K \frac{V^2}{2g} \quad (119)$$

en donde K puede referirse a una pérdida de carga menor o a la suma de varias pérdidas. Al despejar L_e , se tiene:

$$L_e = \frac{KD}{f} \quad (120)$$

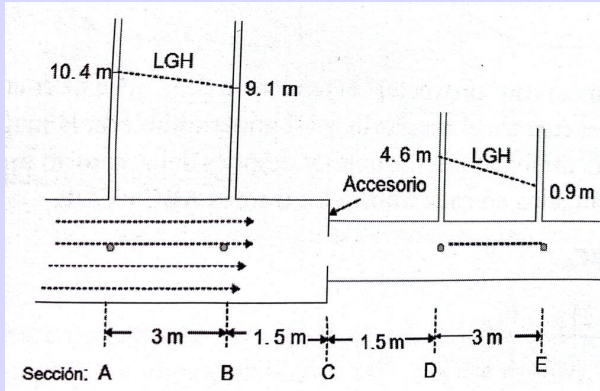
Por ejemplo, si las pérdidas menores en una tubería de 12 *pulg* = 1 *ft* se suman y da $K = 20$, y si $f = 0.020$ para la tubería, a la longitud real de la tubería se puede sumar $20(1/0.020) = 1000\text{ft}$ y esta longitud adicional o equivalente causa la misma resistencia al flujo que las pérdidas menores.

Example 7. Encuéntrese el caudal que fluye por la tubería en la figura con $H = 10\text{ m}$, y las pérdidas de



energía para un caudal de 60 L/s.

Example 8. Por un sistema de conducción de un modelo de laboratorio, fluye agua con un caudal de $0.0014\text{ m}^3/\text{s}$. El modelo consiste en una tubería de 25 mm de diámetro que se acopla, a través de una reducción brusca, a una tubería de 19 mm de diámetro. Para el caudal ya definido, la línea resultante de gradiente hidráulico presenta los valores ilustrados en la figura. Determinar el coeficiente K del accesorio



reductor.

8 Flujo normal a superficie libre

El flujo uniforme ocurre en largos y rectos canales con una pendiente y un ancho constante (ver figure 28). Si consideramos una sección 1 aguas arriba y otra sección 2 aguas abajo en un tramo de canal, la profundidad es constante ($y_1 = y_2$) y se conoce como la *profundidad normal* ($y_1 = y_2 = y_n$). Esto implica que la velocidad $V_1 = V_2 = V_o$ es también constante. La pendiente del canal se puede calcular como $S_o = \tan \theta$, donde θ es el ángulo de inclinación del canal, considerado positivo para un flujo descendente. De acuerdo con esto, de la ecuación de Bernoulli, tenemos:

$$h_f = z_1 - z_2 = S_o L \quad (121)$$

donde L es la longitud entre 1 y 2. La ecuación 121 indica que la pendiente de la línea de energía $S_f = h_f/L$ es la misma pendiente del canal S_o . Esto quiere decir además que la pérdida de energía es únicamente potencial.

Teniendo en cuenta que el flujo esta totalmente desarrollado, la ecuación de Darcy-Weisbach para el calculo de pérdidas por fricción en tuberías:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (122)$$

Para el caso de canales se debe tener en cuenta que para tuberías $R_h = D/4$, $D = 4R_h = 4A/P$, donde R_h es el radio hidráulico, A es el area de la sección transversal del canal y P es el perimetro mojado del canal (ver figura 29).

Combinando las ecuaciones 121 y 122, se puede obtener una expresión para la velocidad en un canal con flujo uniforme:

$$V_o = \left(\frac{8g}{f} \right)^{1/2} R_h^{1/2} S_o^{1/2} \quad (123)$$

De la ecuación anterior, el termino $\left(\frac{8g}{f} \right)^{1/2}$ es constante en canales y depende de la rugosidad de este y es conocido como el coeficiente (C) de Chezy que tiene dimensiones $L^{1/2}T^{-1}$. La ecuación 123 se convierte en la *ecuación de Chezy*:

$$V_o = C R_h^{1/2} S_o^{1/2} \quad Q = C A R_h^{1/2} S_o^{1/2} \quad (124)$$

Diversos valores del C de Chezy se han obtenido a través de la experimentación, estos valores van desde $60 \text{ pie}^{1/2}\text{s}^{-1}$ para canales pequeños y rugosos hasta $160 \text{ pie}^{1/2}\text{s}^{-1}$ para canales grandes y superficie suave.

De acuerdo con la ecuación 87, el esfuerzo cortante de pared promedio τ_0 para un canal con flujo uniforme, se expresa como:

$$\tau_0 = \rho g R_h S_o \quad (125)$$

La ecuación 123 y quizás, desde el punto de vista teórico, la ecuación más apropiada para el análisis de flujo uniforme, en donde el f se estima usando la ecuación de Colebrook-White. Sin embargo Robert Manning en 1891 haciendo experimento en canales reales, encontró:

$$C = \left(\frac{8g}{f} \right)^{1/2} \approx \alpha \frac{R_h^{1/6}}{n} \quad (126)$$

donde n es un parámetro de rugosidad y α es un factor de conversión: para Sistema Internacional $\alpha = 1$ y para Sistema Inglés $\alpha = 1.486$. Reemplazando la ecuación 126 en la ecuación 124, se tiene la *ecuación de Manning* para flujo uniforme en canales:

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{1.0}{n} R_h^{2/3} S_o^{1/2} & V_o \text{ en } m/s, \text{ Sistema Internacional} \\ V_o &= \frac{1.486}{n} R_h^{2/3} S_o^{1/2} & V_o \text{ en } pie/s, \text{ Sistema Inglés} \end{aligned} \quad (127)$$

Valores experimentales de n se encuentran en la figura 30 para varias superficies de canales. n puede variar desde 0.01 para canales en vidrio con superficies lisas hasta valores de $n = 0.15$ para llanuras de inundación en donde existen múltiples tipos de vegetación incluyendo árboles. Teniendo en cuenta que la relación entre C y el n en la ecuación 126 no es del todo exacta, se ha encontrado que n cambia en función del radio hidráulico; esto no solo incluye los efectos de cambios en la profundidad si no también de cambios en la sección debido a la erosión y depositación de sedimentos.

Example 9. *Unos ingenieros encontraron que el canal rectangular mas eficiente, el que transporta la mayor cantidad de flujo uniforme para un area dada, es aquel que fluye con una profundidad igual a la mitad del ancho del canal. Si consideramos un canal hecho en ladrillo ($n = 0.015$) sobre una pendiente $S_o = 0.006$, determine el ancho óptimo si el canal transporta un caudal de $100 \text{ pie}^3/\text{s}$.*

8.1 Estimación de la profundidad normal

En muchos problemas de ingeniería, dado el Q y las características del canal y del fluido es necesario estimar la profundidad normal y_n . Dicha estimación se hace solucionando la ecuación 127 para y_n . En la tabla 3 se presenta la geometría para las secciones transversales típicas de canales.

Tipo	Perimetro(P)	Area(A)	Variable
Rectangular	$b + 2y_n$	by_n	y_n
Triangular	$y_n \left(\frac{1}{\sin \theta_1} + \frac{1}{\sin \theta_2} \right)$	$\frac{y_n^2}{2} \left(\frac{1}{\tan \theta_1} + \frac{1}{\tan \theta_2} \right)$	y_n
Trapezoidal	$y_n \left(\frac{1}{\sin \theta_1} + \frac{1}{\sin \theta_2} \right) + b$	$\frac{y_n}{2} \left[y_n \left(\frac{1}{\tan \theta_1} + \frac{1}{\tan \theta_2} \right) + 2b \right]$	y_n
Circular	$2R\theta$	$R^2 \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right)$	$y_n = R$ Si $\theta = 90$
			$y_n = R(1 - \cos \theta)$ Si $0 < \theta < 90$
			$y_n = R(1 + \sin \theta)$ Si $90 < \theta < 180$

Table 3: Propiedades geométricas para diferentes secciones transversales de un canal. La notación de la ecuaciones se puede observar en figura 31.

Reemplazando $R_h = \frac{A}{P}$ en la ecuación 127 para cualquiera de las secciones de la tabla 3, se obtiene una ecuación implícita en y_n , con excepción de la seccion circular en donde la función es implícita para $0^\circ < \theta < 180^\circ$. La ecuación a resolver es:

$$\begin{aligned} f(y_n) &= Q - A \frac{\alpha}{n} R_h^{2/3} S_o^{1/2} && \text{Para todas las secciones exepcto la circular} \\ f(\theta) &= Q - A \frac{\alpha}{n} R_h^{2/3} S_o^{1/2} && \text{Para la sección circular} \end{aligned} \quad (128)$$

Para resolver la ecuación 128, se presenta a continuación un procedimiento con base en el *método de bisección*:

- Leer la siguiente informacion:
 - Para la todas las secciones exepcto la circular leer: n , α , S_o , Q , b , θ_1 y θ_2 . Note que para la sección rectangular $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$, y para la sección triangular $b = 0$.
 - Para la sección circular leer: n , α , S_o , Q , R y θ .
- Definir los límites de iteración, a y b , para el método de bisección:
 - Para todas las secciones exepcto la circular leer: $a = 0.01$ y $b = 1000$ ($a \leq y_n \leq b$). Note que $y_n > 0$ y que $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$. Note que la función sign extrae el signo de f .
 - Para la sección circular leer: $a = 0.01^\circ$ y $b = 179.9^\circ$ ($a \leq \theta \leq b$). Note que $0^\circ < \theta < 180^\circ$, y que $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$.
- Si $N \leq N_{max} = 10000$ ir a 4. Si $N > N_{max}$ ir a 10.

4. Calcular $C = \frac{a+b}{2}$.
5. Calcular $f(c)$ usando la ecuación 128. Si $|f(c)| < Error$ o $\frac{b-a}{2} < Error$ ir a 9. Si no se cumple alguna de estas condiciones ir a 8.
6. Si $sign(f(c)) = sign(f(a))$, $a = c$, si no $b = c$. Incrementar $N = N + 1$ e ir 3.
7. Imprimir:
 - (a) para todas las secciones exepcto la circular: $y_n = c$.
 - (b) para la sección circular: $\theta = c$. Usar las ecuaciones de la tabla 3 para convertir θ en y_n .
8. Ha fallado la iteración. Revisar datos de entrada y límites iniciales de iteración.

Example 10. *Un canal trapezoidal en asfalto ($n = 0.016$) y con $S_o = 0.0015$, transporta agua con un caudal de $300 \text{ ft}^3 \text{ s}^{-1}$. Si el ancho del canal es $b = 6 \text{ ft}$ y $\theta_1 = \theta_2 = 50^\circ$, calcular la profundidad normal (y_n).*

Example 11. *Determinar para que relaciones de y_n/D es posible transportar un caudal máximo y obtener una velocidad máxima en un canal de sección circular.*

8.2 Sección óptima de un canal

El diseño de canales en ingeniería requiere determinar la sección óptima (aquella que garantice la menor resistencia al flujo) en un canal para unas condiciones dadas. Usando la ecuación de Manning (ecuación 127) es posible maximizar el radio hidráulico (R_h) para un área (A) y un caudal (Q) dado. Teniendo en cuenta que $R_h = A/P$, para maximizar R_h debemos minimizar el perímetro (P).

Considerando el canal trapezoidal de la figura 32, el area y el perimetro se pueden calcular como:

$$A = by + \beta y^2 \quad (129)$$

$$P = b + 2W = b + 2y(1 + \beta^2)^{1/2} \quad (130)$$

donde $\beta = \cot \theta$ y $y = y_n$. Note que $W = \sqrt{y^2\beta^2 + y^2} = y(\beta^2 + 1)^{1/2}$. Asumiendo que b es un dato dado, se despeja de la ecuación 129:

$$b = \frac{A}{y} - y\beta \quad (131)$$

y de la ecuación 130:

$$b = P - 2y(1 + \beta^2)^{1/2} \quad (132)$$

igualando las ecuaciones 131 y 132 y despejando para P , se tiene:

$$P = \frac{A}{y} - y\beta + 2y(1 + \beta^2)^{1/2} \quad (133)$$

Para minimizar P , se obtiene dP/dy de la ecuación 133 tomando como constantes A y β :

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{A}{y^2} - \beta + 2(1 + \beta^2)^{1/2} \quad (134)$$

igualando $dP/dy = 0$ y despejando y se obtiene el valor de y que minimiza P :

$$y = \left[\frac{A}{2(1 + \beta^2)^{1/2} - \beta} \right]^{1/2} \quad (135)$$

Despejando A de la ecuación 135 y reemplazando en la ecuación 133 para P , la geometría óptima de un canal trapezoidal para un ángulo θ dado es:

$$A = y^2 \left[2(1 + \beta^2)^{1/2} - \beta \right] \quad P = 4y(1 + \beta^2)^{1/2} - 2\beta y \quad R_h = \frac{y}{2} \quad (136)$$

La ecuación 136 indica que para un ángulo θ dado, la sección transversal más eficiente de un canal en flujo uniforme ocurre cuando el radio hidráulico es igual a la mitad la profundidad normal. Igualando las ecuaciones 130 y 136 para P , se tiene una expresión para la base inferior del canal b :

$$b = 2y \left(\sqrt{1 + \beta^2} - \beta \right) \quad (137)$$

y la base superior b_s

$$b_s = b + 2\beta y = 2y \left(\sqrt{1 + \beta^2} \right) \quad (138)$$

Teniendo en cuenta que cuando $\theta = 90^\circ$ $\beta = 0$ por lo que tenemos un canal rectangular, reemplazando esto en las ecuaciones 136 se tiene la sección más eficiente para un canal rectangular:

$$A = 2y^2 \quad P = 4y \quad R_h = \frac{y}{2} \quad b = 2y \quad (139)$$

Para encontrar la profundidad correcta, es necesario solucionar las ecuaciones anteriores en conjunto con la ecuación 127 para un caudal dado.

Es posible encontrar el mejor ángulo θ del canal trapezoidal para un área y una profundidad dada. Evaluando $dP/d\beta$ para A y y constante se tiene:

$$\frac{dP}{d\beta} = -y + 2\beta y (1 + \beta^2)^{-1/2} \quad (140)$$

igualando la ecuación 141 a cero se tiene:

$$2\beta = (1 + \beta^2)^{1/2} \quad \beta = \cot \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \theta = 60^\circ \quad (141)$$

Esto indica que para una profundidad dada, el ángulo θ óptimo es 60° , o que la sección óptima (la que maximiza el flujo) es la mitad de un hexágono.

Si se circunscribe una sección circular de radio R en la sección trapezoidal donde $\theta = 60^\circ$, se tiene que $R = \frac{1}{2}b_s \sin \theta$. Reemplazando b_s en esta ecuación y sabiendo que $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, se tiene que $R = y$. Esto demuestra que una sección circular tiene su máxima eficiencia cuando $y = R$ (semicírculo).

Para una sección triangular ($b = 0$ en la figura 32), el área y el perímetro son:

$$A = \beta y^2 \quad (142)$$

$$P = 2W = 2y(1 + \beta^2)^{1/2} \quad (143)$$

Despejando y de la ecuación 142 se tiene que $y = \left(\frac{A}{\beta}\right)^{1/2}$. Reemplazando en la ecuación 143, el perímetro es:

$$P = 2W = 2 \left(\frac{A}{\beta}\right)^{1/2} (1 + \beta^2)^{1/2} \quad (144)$$

derivando P con respecto a β en la ecuación 144, se tiene:

$$\frac{dP}{d\beta} = 2A^{1/2} \left[\beta (1 + \beta^2)^{-1/2} \beta^{-1/2} - \frac{1}{2} \frac{(1 + \beta^2)^{1/2}}{\beta^{3/2}} \right] \quad (145)$$

Haciendo $dP/d\beta = 0$, se tiene:

$$\frac{\beta^{1/2}}{(1 + \beta^2)^{1/2}} = \frac{(1 + \beta^2)^{1/2}}{2\beta^{3/2}} \quad (146)$$

Solucionando la ecuación 146, se tiene que $\beta = 1$. Esto quiere decir que una sección triangular con $\theta = 45^\circ$ es la mas eficiente.

Example 12. Para un canal rectangular en ladrillo ($n = 0.015$) diseñado para transportar $5 \text{ m}^3/\text{s}$ y con una pendiente de $S_o = 0.001$, determinar las mejores dimensiones para y y b . Realizar los mismos cálculos si la sección transversal del canal es la mitad de un hexágono y si es un semicírculo. Comparar los resultados.

8.3 Cálculo de la profundidad normal en cauces naturales

En la naturaleza, los canales por los cuales transcurre flujo poseen secciones irregulares como en el caso de rios y quebradas. Dicha sección cambia en el tiempo debido a procesos de erosion y sedimentación en el fondo y en las orillas producto de cambios en la hidrodinámica del flujo. El cálculo de la profundidad normal se hace con base en la solución de la ecuación de Manning implícita para y_n siguiendo un método numérico. Si tenemos una sección irregular de un canal como el mostrado en la figura 33, conformada por una serie de m puntos $p(x, y)$ con coordenadas espaciales x y y , y cuyos coeficientes de Manning estan dados entre cada par de puntos p_i y p_{i+1} (segmento) para un total de $m - 1$ coeficientes, el área mojada de la sección para un valor de y_n se puede calcular como:

$$A = \sum_{i=1}^{m-1} A_i = \sum_{i=1}^{m-1} [(y_n - y_i) + (y_n - y_{i+1})] \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \quad (147)$$

, perímetro se puede calcular como:

$$P = \sum_{i=1}^{m-1} P_i = \sum_{i=1}^{m-1} \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2} \quad (148)$$

y el coeficiente de rugosidad de Manning como:

$$n = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} n_i A_i}{\sum_{i=1}^{m-1} A_i} \quad (149)$$

Note que la ecuación 147 calcula el área mediante la sumatoria de las areas individuales (trapezios) A_i formadas entre cada par de puntos p_i y p_{i+1} , el perímetro en la ecuación 148 es la sumatoria de las

distancias Euclidianas entre cada par de puntos p_i y p_{i+1} y el coeficiente de rugosidad de Manning es el promedio ponderado de los $m - 1$ coeficientes de rugosidad usando como pesos las áreas A_i .

A continuación se muestra un procedimiento para el cálculo de y_n en canales con sección irregular basado en el método de bisección:

1. Leer la siguiente información: n , α , S_o , Q , xs , ys y ns . Note que xs y ys son dos vectores con las coordenadas x y y respectivamente para un numero m de puntos que conforman la sección transversal. ns es un vector de coeficientes de Manning para los $m - 1$ segmentos que conforman la seccion.
2. Definir los límites de iteración, a y b , para el método de bisección: $a = 0.01$ y $b = 1000$ ($a \leq y_n \leq b$). Note que $y_n > 0$ y que $sign(f(a)) \neq sign(f(b))$. Note que la función $sign$ extrae el signo de f .
3. Si $N \leq N_{max} = 10000$ ir a 4. Si $N > N_{max}$ ir a 10.
4. Calcular $C = \frac{a+b}{2}$.
5. Con base en las coordenadas dadas (xs y ys), interpolar un nuevo conjunto de puntos para las profundidades normales a , b y c .
6. Calcular $f(a)$, $f(b)$ y $f(c)$ usando la ecuación 128 usando la nuevas secciones interpoladas para a , b y c . Note que para evaluar la función es necesario, para cada nuevo conjunto de puntos, calcular el área (ecuación 147), el perimetro (ecuación 148) y la rugosidad de Manning (ecuación 149).
7. Si $|f(c)| < Error$ o $\frac{b-a}{2} < Error$ ir a 9. Si no se cumple alguna de estas condiciones ir a 8.
8. Si $sign(f(c)) = sign(f(a))$, $a = c$, si no $b = c$. Incrementar $N = N + 1$ e ir 3.
9. Imprimir: $y_n = c$.
10. Ha fallado la iteración. Revisar datos de entrada y límites iniciales de iteración.

References

- [1] Yunus Cengel and John Cimbala. *Ebook: Fluid mechanics fundamentals and applications (si units)*. McGraw Hill, 2013.
- [2] CA Duarte Agudelo. *Mecánica de fluidos e hidráulica*. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ingeniería., 2011.
- [3] I Shames. *Fluid mechanics and application*. editorial graw hill, 2010.
- [4] RL Street, GZ Watters, and JK Vennard. *Elementary fluid mechanics*, (1995). *John Wiley and Sons, New York, ISBN 0, 471(01310):3*.
- [5] Victor L. Streeter and E. Benjamin. Wylie. *Fluid mechanics* /. Tata McGraw-Hill,, New Delhi,, c1983.
- [6] Frank M White. *Fluid mechanics*. New York, 1990.

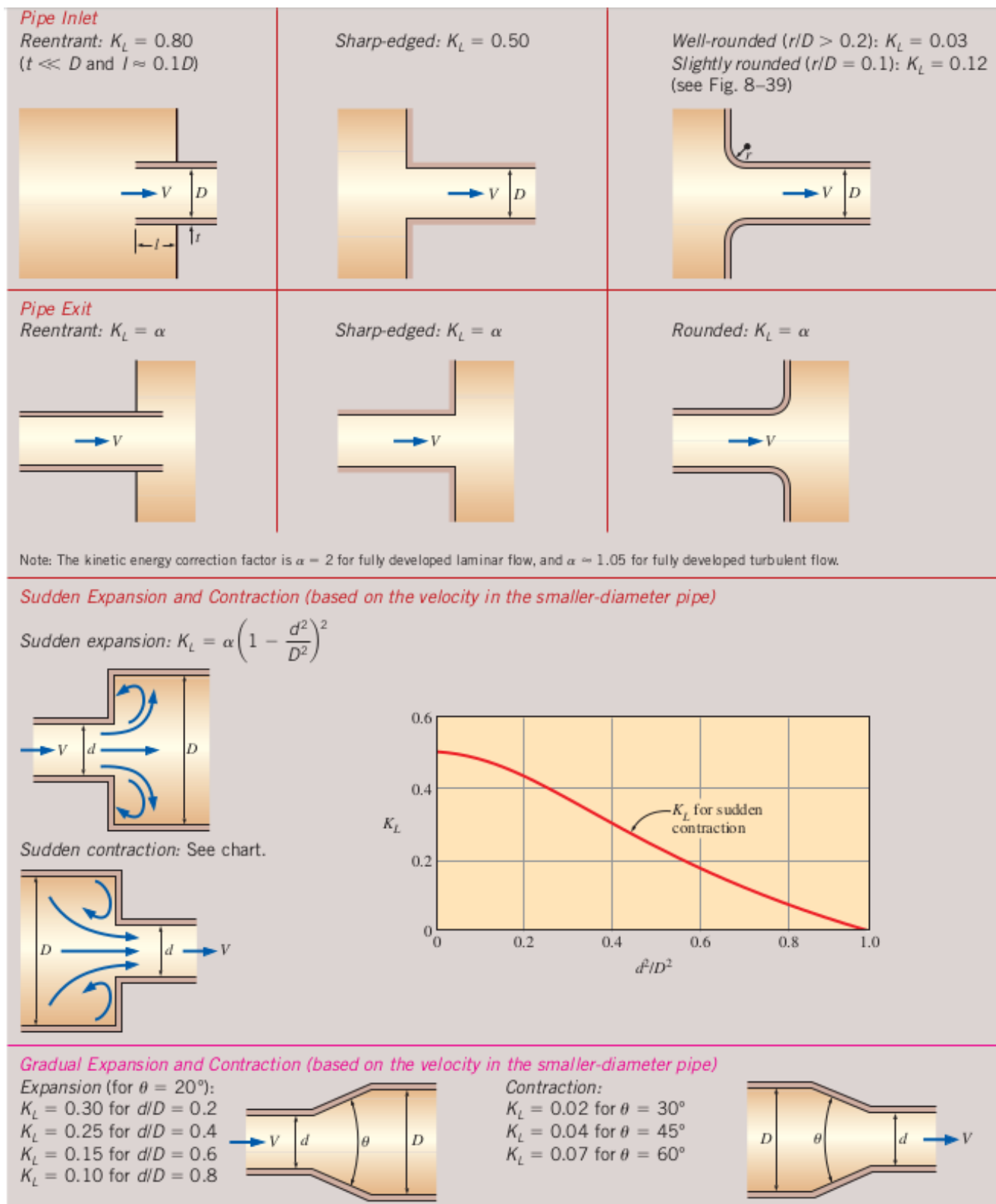


Figure 26: Valores de K para diferentes tipos de accesorios para flujo turbulento (tomado de [1]).

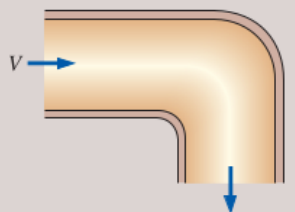
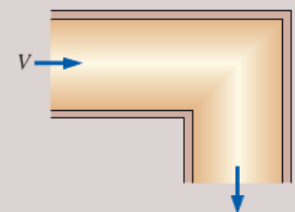
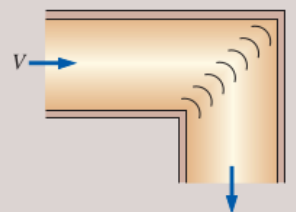
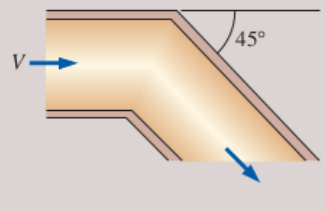
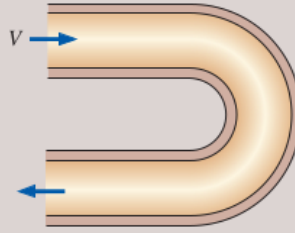
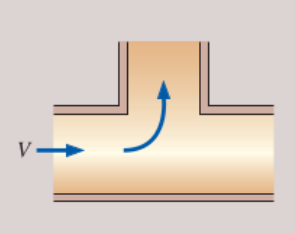
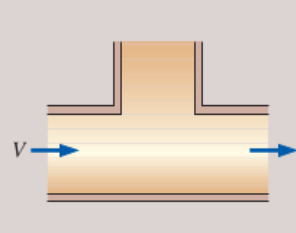
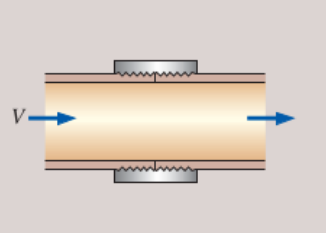
<p>Bends and Branches</p> <p>90° smooth bend: Flanged: $K_L = 0.3$ Threaded: $K_L = 0.9$</p> 	<p>90° miter bend (without vanes): $K_L = 1.1$</p> 	<p>90° miter bend (with vanes): $K_L = 0.2$</p> 	<p>45° threaded elbow: $K_L = 0.4$</p> 								
<p>180° return bend: Flanged: $K_L = 0.2$ Threaded: $K_L = 1.5$</p> 	<p>Tee (branch flow): Flanged: $K_L = 1.0$ Threaded: $K_L = 2.0$</p> 	<p>Tee (line flow): Flanged: $K_L = 0.2$ Threaded: $K_L = 0.9$</p> 	<p>Threaded union: $K_L = 0.08$</p> 								
<p>Valves</p> <table><tr><td>Globe valve, fully open: $K_L = 10$</td><td>Gate valve, fully open: $K_L = 0.2$</td></tr><tr><td>Angle valve, fully open: $K_L = 5$</td><td>$\frac{1}{4}$ closed: $K_L = 0.3$</td></tr><tr><td>Ball valve, fully open: $K_L = 0.05$</td><td>$\frac{1}{2}$ closed: $K_L = 2.1$</td></tr><tr><td>Swing check valve: $K_L = 2$</td><td>$\frac{3}{4}$ closed: $K_L = 17$</td></tr></table>				Globe valve, fully open: $K_L = 10$	Gate valve, fully open: $K_L = 0.2$	Angle valve, fully open: $K_L = 5$	$\frac{1}{4}$ closed: $K_L = 0.3$	Ball valve, fully open: $K_L = 0.05$	$\frac{1}{2}$ closed: $K_L = 2.1$	Swing check valve: $K_L = 2$	$\frac{3}{4}$ closed: $K_L = 17$
Globe valve, fully open: $K_L = 10$	Gate valve, fully open: $K_L = 0.2$										
Angle valve, fully open: $K_L = 5$	$\frac{1}{4}$ closed: $K_L = 0.3$										
Ball valve, fully open: $K_L = 0.05$	$\frac{1}{2}$ closed: $K_L = 2.1$										
Swing check valve: $K_L = 2$	$\frac{3}{4}$ closed: $K_L = 17$										

Figure 27: Valores de K para diferentes tipos de accesorios para flujo turbulento (tomado de [1]).

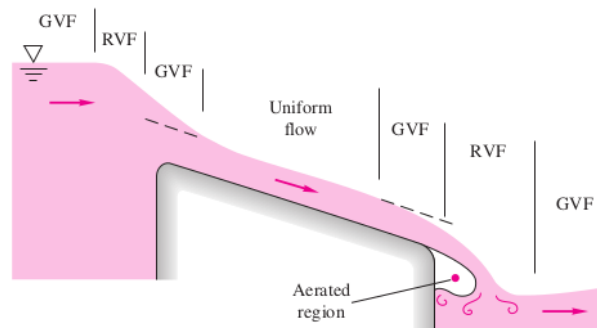


Figure 28: Tipos de flujo en un flujo a superficie libre en un canal (tomado de [6]).

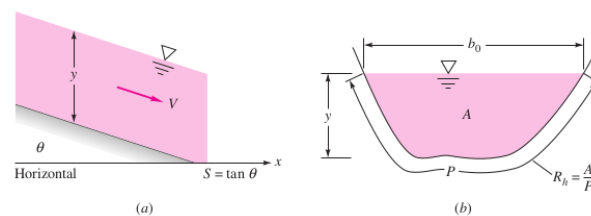


Figure 29: Geometría y notación en un canal inclinado, a) vista lateral y b) sección transversal (tomado de [6]).

	n	Average roughness height ϵ	
		ft	mm
Artificial lined channels:			
Glass	0.010 ± 0.002	0.0011	0.3
Brass	0.011 ± 0.002	0.0019	0.6
Steel, smooth	0.012 ± 0.002	0.0032	1.0
Painted	0.014 ± 0.003	0.0080	2.4
Riveted	0.015 ± 0.002	0.012	3.7
Cast iron	0.013 ± 0.003	0.0051	1.6
Concrete, finished	0.012 ± 0.002	0.0032	1.0
Unfinished	0.014 ± 0.002	0.0080	2.4
Planed wood	0.012 ± 0.002	0.0032	1.0
Clay tile	0.014 ± 0.003	0.0080	2.4
Brickwork	0.015 ± 0.002	0.012	3.7
Asphalt	0.016 ± 0.003	0.018	5.4
Corrugated metal	0.022 ± 0.005	0.12	37
Rubble masonry	0.025 ± 0.005	0.26	80
Excavated earth channels:			
Clean	0.022 ± 0.004	0.12	37
Gravelly	0.025 ± 0.005	0.26	80
Weedy	0.030 ± 0.005	0.8	240
Stony, cobbles	0.035 ± 0.010	1.5	500
Natural channels:			
Clean and straight	0.030 ± 0.005	0.8	240
Sluggish, deep pools	0.040 ± 0.010	3	900
Major rivers	0.035 ± 0.010	1.5	500
Floodplains:			
Pasture, farmland	0.035 ± 0.010	1.5	500
Light brush	0.05 ± 0.02	6	2000
Heavy brush	0.075 ± 0.025	15	5000
Trees	0.15 ± 0.05	?	?

Figure 30: Valores de n de Manning para diferentes tipos de materiales en canales (tomado de [6]).

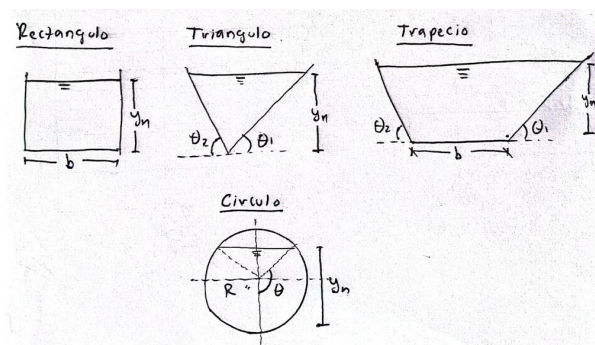


Figure 31: Notación en varios tipos de canales.

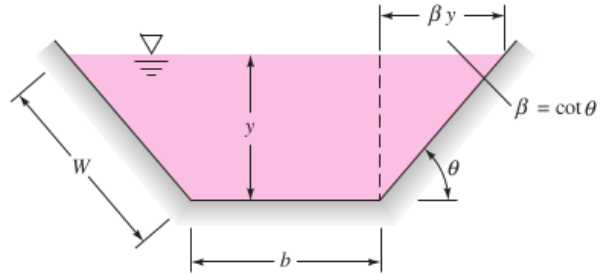


Figure 32: Geometria de un canal trapezoidal (tomado de [6]).

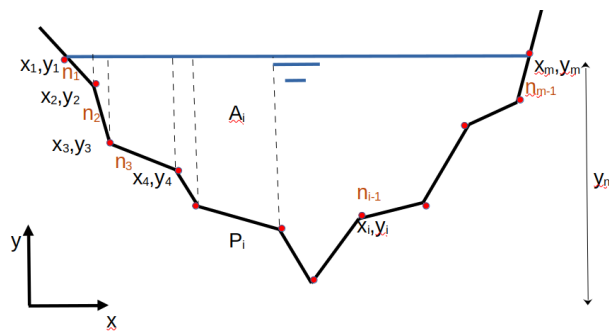


Figure 33: Sección transversal de un cauce irregular (e.g. río).