Resume No.2: Estática de los Fluidos

Ley fundamental de la estática

En un fluido estático las fuerzas actuantes sobre un elemento diferencial de fluido son las *fuerzas de presión* sobre las caras del elemento y el *peso* del elemento de fluido. La presión (P) es siempre perpendicular sobre la superficie actuante y tiene unidades en S.I de 1 $pascal = 1\ Nm^{-2}$ y en sistema inglés de $lb\ ft^{-2}$ o 1 $psi = 1 lbpulg^{-2}$. Tambien se puede expresar en *bares* o *atmośferas*. La presión de un sistema se puede medir con respecto al *vacio* la cual se denomina *presión absoluta* (P_{abs}); note que $P = 0$ en el vacio. Por lo tanto:

$$P_{abs} = P_{atm} + \gamma h$$

donde h es la altura de la columna de fluido y γ es el peso específico del fluido. Usualmente P_{atm} es conocida a nivel de mar. La presión de un sistema también se puede expresar como *presión relativa*, es decir, tomando como referencia un nivel especifico, e.g. el nivel del mar, por lo que $P_{atm} = 0$, por lo tanto la presion relativa:

$$P = \gamma h$$

Note que en un fluido, P aumenta con la profundidad. En la atmósfera, P disminuye con la altitud (menor columna de aire). Por otro lado, *presiones negativas* son aquellas menores que P_{atm}. *En casos prácticos en donde las alturas/profundidades son relativamente pequeñas, la presión del aire es la misma en todos los puntos en la vertical.* Generalidades acerca de la presión:

- La presión (P) es *isotrópica*, eso quiere decir que es la misma en cualquier dirección, por eso es una cantidad *escalar*.
- La presión es la misma en un plano horizontal que conecta dos fluidos.
- La presión es independiente de la forma del recipiente que contiene el líquido. Es función de la profundidada/altura del fluido.

El **Principio de Pascal** establece que si se tienen dos cámaras con dos pistones (1 y 2) comunicádas a través del mismo líquido (e.g. *Gato Hidráulico*), la presión en un plano horizontal es igual, por lo tanto:

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

donde F es la fuerza sobre el piston y A es el area transversal del piston. Si $A_1 > A_2$, la fuerza F_1 se multiplica en $\frac{A_1}{A_2}$, por lo que el gato hidráulico actúa como un multiplicador de fuerzas.

Dispositívos para medir presión

Existen diferentes tipos de instrumentos para medir presión en fluidos:

- *Barómetro*: Sirve para medir P_{atm}. Consiste en un tubo de ensayo invertido y sin aire (vacio), el cual es sumergido en un contenedor con mercurio. Cuando el instrumento se expone al aire libre, el mercurio debe ascender por el tubo de ensayo una altura h, por lo que:

  $$P_{atm} = \gamma_{Hg} h$$

  donde γ_{Hg} es el peso específico del mercurio.
- *Manómetros*: Son dispositivos usados para la medición de presiones (o diferencia de presiones) con base en el desplazamiento de las columnas de fluidos. Los manómetros son dispositivos que se adaptan a depositos, tuberías o canales con el proposito de medir presiones de fluidos en reposo o en movimiento.

Como resolver problemas de manómetros

Es importante saber que:

- El cambio de presión en una columna de fluido h es: $\Delta P = \gamma h$.
- La presión en un fluido incrementa hacia abajo y disminuye hacia arriba ($P_{down} > P_{top}$).
- Dos puntos conectados por un fluido continuo en reposo sobre el mismo plano horizontal tienen la misma presión.

Para resolver problemas de manómetros:

1. Comenzar por uno de los extremos del manómetro y anotar la presión P (conocida o desconocida).
2. Recorrer el manómetro hasta el otro extremo de tal manera que se suma a P el cambio de presión ($\Delta P = \gamma h$) que se tenga de un menisco al siguiente: $+$ si el segundo menisco se encuentra a menor elevación; $-$ si está a mayor elevación. En términos simples: se suma presión (γh) si bajo por el manómetro y resto presión si subo por el manómetro.
3. Al llegar al otro extremo se iguala la suma y resta de presiones a la presión en este punto. Luego se despeja la presion desconocida.

Fuerza sobre superficies planas sumergidas

La *fuerza* (F) sobre una superficie plana sumergida en posición horizontal, vertical o inclinada (a un ángulo θ con respecto a la superficie del agua), se calcula como:

$$F = P_0 A + \gamma h_g A$$

donde h_g es la profundidad a la cual esta el *centroide* (g) de la superficie sumergida, P_0 es una presión inicial o conocida (e.g. P_{atm}) y A es el area de la superficie. Si asumimos que $P_0 = 0$:

$$F = \gamma h_g A$$

El punto de aplicación de F es el *centro de presiones* (p). Las coordenadas de p son:

$$y_p = \frac{I_g}{y_g A} + y_g$$

$$x_p = \frac{I_{xy}}{x_g A} + x_g$$

donde I_g es el momento de inercia de la superficie con respecto a g, I_{xy} es el producto de inercia con respecto a g, x_g es la coordenada x de g y y_g es la coordenada y de g; para una superficie inclinada a un ángulo θ con respecto a la superficie del agua $y_g = \frac{h_g}{\sin\theta}$. Note que si la superficie está inclinada a un ángulo θ con respecto a la superficie del agua, $y_g = h_g / \sin\theta$. Si la superficie es simétrica, $x_p = x_g$. F puede además calcularse como el volumen (geométrico) V del prisma de presiones que actúa sobre la superficie:

$$F = \gamma V$$

El punto de aplicación de F son las coordenadas x y y del centroide del prisma de presiones.

Fuerza sobre superficies curvas sumergidas

La fuerza F ejercida por la acción del fluido sobre una superficie curva cambia de dirección y magnitud con la curvatura de la superficie. Por esto, la fuerza total se descompone en una fuerza horizontal F_H y en una fuerza vertical F_V. F_H actua sobre un plano vertical (proyección de la curva sobre un plano vertical), por lo tanto el cálculo de F_H se hace para una superficie plana. El punto de aplicación de F_H sigue la misma metodología que para superficies planas. Note que la coordenada de interés (si hay simétria) es y_p en el caso del punto de aplicación de F_H. Para calcular F_V se determina el prisma de presiones que actua por encima y verticalmente sobre la superficie curva:

$$F_V = \gamma V$$

donde V es el volumen (geométrico) del prisma de presiones. El punto de aplicación de F_V es:

$$y_p = y_g = \frac{\int_V y dV}{\int_V dV} \approx \frac{\sum_{i=1}^n y_{c_i} V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}$$

$$x_p = x_g = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV} \approx \frac{\sum_{i=1}^n x_{c_i} V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}$$

donde n es el número de elementos geométricos que componen el volumen. La resultante $F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$.

Flotación y estabilidad

La fuerza de flotación (F_B) se obtine del balance de fuerzas de presión que actuan sobre un objeto flotante o sumergido:

$$F_B = \rho g V$$

donde ρ es la densidad del fluido y V es el volumen de la porción sumergida del objeto o del fluido desplazado por el objeto. De acuerdo con el **Principio de Arquimides**, la fuerza de flotación es equivalente al peso (W) del fluido desplazado (= peso del objeto) por el objeto:

$$F_B = W \Rightarrow \rho g V = \rho_{ob} g V_{ob} \Rightarrow \frac{V}{V_{obj}} = \frac{\rho_{obj}}{\rho}$$

donde ρ_{obj} es la densidad del objeto, V_{obj} es el volumen del objeto. Note que el punto de aplicación de W es el centroide g del objeto. El punto de aplicación de F_B es el centroide b de la porción sumergida del objeto.
Un cuerpo sumergido es *estable* si el punto g está por debajo del punto b o si estos dos coinciden. El cuerpo sumergido es *inestable* si p está por debajo de g. En el caso de un cuerpo flotante, dicho objeto es siempre estable y no depende de la posicion de g y p cuando estan en el mismo eje vertical. Si se aplica una fuerza desestabilizadora F sobre el objecto, b se desplaza horizontalmente hacia un nuevo punto b', por lo tanto la estabilidad dependerá de la posición del metacentro m, el cual es el punto de intesección entre el eje vertical que pasa por g y el eje vertical que pasa por b'. Si m está por encima de g, el objeto es *estable*, si m está por debajo de g el objeto es *inestable*. La *altura metacentrica* $\overline{mg}$ se cálcula como:

$$\overline{mg} = \frac{I_g}{y_g A} + \overline{gb}$$

donde $\overline{gb}$ es la distancia entre g y b, I_g es el momento de inercia de la sección con respecto a g y y_g es la coordenada y de g. El momento que se opone al generado por la fuerza desestabilizadora F es el *momento restaurador*:

$$M = F_B s$$

donde s es la distancia horizontal entre el eje vertical que pasa por b' y el eje vertical que pasa por g.

Equilibrio relativo de fluidos en movimiento

Cuando un fluido se mueve como un cuerpo rígido con o sin aceleración y sin la presencia de esfuerzos cortantes, las presiones dentro del fluido se alteran. Se analizan dos casos:

1. **Movimiento lineal de un fluido**: E.g. carrotanque que transporta un fluido en su interior y se mueve en un plano xz (x horizontal y z vertical) con una aceleración $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_z \vec{k}$. La presión del fluido dentro del carrotanque se puede calcular como:

   $$dP = -\rho a_x dx - \rho(g + a_z) dz \;\Rightarrow\; P = P_0 - \rho a_x x - \rho(g + a_z) z$$

   donde P_0 es una presion conocida en un punto. Los planos de igual presión $dP = 0$ son conocidos como *isobaras*.

2. **Movimiento rotacional**: E.g. Cilindro con un fluido que rota a una velocidad angular ω con respecto a un eje vertical z. La distancia horizontal esta dada por r (radio). La presión puede ser expresada como:

   $$dP = \rho r \omega^2 dr - \rho g dz \;\Rightarrow\; P = P_0 + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - \rho g z$$