# Resume No.4: Conservación de Momentum y Análisis Dimensional

## Conservación del Momentum

- **Momentum Lineal**: Del teorema de transporte de Reynolds, si la propiedad extensiva $N = m\vec{U}$ (cantidad de movimiento), entonces $\eta = \vec{U}$. Entonces:

$$\frac{d(m\vec{U})}{dt} = \oiint_{S.C.} \vec{U}\rho(\vec{U}\cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V.C.} \vec{U}\rho dv$$

  donde $\vec{U}$ es el vector velocidad del flujo, $m$ es la masa del fluido, $\rho$ es la densidad del fluido en el V.C. Por lo que la tasa de cambio de la cantidad de movimiento es igual al flujo de cantidad de movimiento a travez de la S.C. más la tasa de cambio de la cantidad de movimiento interna en el V.C. Si el flujo es permanente y teniendo en cuenta que $\frac{d(m\vec{U})}{dt} = \sum F_{ext}$, donde $F_{ext}$ son las fuerzas actuantes sobre el volumen de control, se tiene:

$$\sum F_{ext} = \oiint_{S.C.} \vec{U}\rho(\vec{U}\cdot d\vec{A})$$

  Si el flujo es 1D y uniforme, las fuerzas externas en dirección $i = x, y, z$, son iguales al momentum entrante ($out$) menos el momentum saliente ($in$):

$$\sum F^i_{ext} = \sum(\rho QV)^i_{out} - \sum(\rho QV)^i_{in}$$

- **Fuerza sobre estructuras**: Partiendo de la ecuación anterior, si se tiene un V.C. comprendido entre una entrada y una salida de flujo y si el flujo másico $\rho Q$ se conserva, la ecuacion queda:

$$\sum F^i_{ext} = \rho Q(V^i_{out} - V^i_{in})$$

  donde $\sum F^i_{ext}$ son las fuerzas externas actuantes (e.g. presiones hidroestáticas, peso del fluido) incluyento la reacción $R^i$ de la estructura. $V^i_{out}$ y $V^i_{in}$ son positivas en la dirección positiva de $i$ por lo que el signo cambia dependiendo de la dirección.

- **Fuerza sobre alabes**:Note que en el caso de *alabes* en movimiento con velocidad $C$, la ecuación queda:

$$\sum F^i_{ext} = \rho(Vch - C)A_{ch}\left((V_{ch} - C)^i_{out} - (V_{ch} - C)^i_{in}\right)$$

  donde $V_{ch}$ es la velocidad del chorro que impacta el alabe, $A_{ch}$ es el área de la sección del orificio del chorro.

## Momento de la cantidad de movimiento

La sumatoria de todos los momentos externos con respecto a un origen $O$ ($\sum M_O = \vec{r}\times\vec{F}$) que actuan sobre la masa de fluido de un V.C. es igual:

$$\sum M_O = \sum \vec{r}\times\vec{F} = \frac{d(\vec{r}\times m\vec{U})}{dt}$$

reemplazando en el *Teorema de Transporte de Reynolds*, tenemos:

$$\sum M_O = \oiint_{S.C.} (\vec{r}\times\vec{U})\rho(\vec{U}\cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V.C.} (\vec{r}\times\vec{U})\rho dv$$

donde $\vec{r}$ es el vector posición desde $O$ hasta la posición de $\vec{F}$ o $\vec{U}$, conocido como el brazo de la fuerza. Para flujo permanente, 1D y uniforme, la ecuación queda:

$$\sum M_O = \sum(\vec{r}\times\vec{U})_{out}(\rho Q))_{out} - \sum(\vec{r}\times\vec{U})_{in}(\rho Q))_{in}$$

Si el rotor gira con una velocidad angular $\omega$ en sentido negativo, $\vec{U} = V - r\omega$, donde $V$ es la magnitud de $\vec{U}$.

## Resalto Hidráulico

Un resalto hidráulico (RH) es un fenómeno del flujo a superficie libre que se presenta cuando hay un cambio de régimen *supercrítico* a *subcrítico*. Si consideramos un V.C. en un canal comprendido entre la sección de entrada (1) al RH y la sección de salida (2) y si hacemos un balance de fuerzas en el volumen de control, tenemos:

$$\sum F_x = F_1 - F_2 = \rho Q\left(Vx_2 - Vx_1\right)$$

donde $F_1 = \gamma A_1\bar{h}_1$ y $F_2 = \gamma A_2\bar{h}_2$ son las fuerzas hidroestáticas en la sección 1 y 2, respectivamente, $A$ es el area de la sección transversal y $\bar{h}$ es la profundidad al centroide de la sección. Reemplazando y dividiendo por $\gamma$:

$$A_1\bar{h}_1 + \frac{Q^2}{gA_1} = A_2\bar{h}_2 + \frac{Q^2}{gA_2}$$

Esta ecuación demuestra que la cantidad de movimiento se conserva en un resalto, por lo que la *Fuerza específica* es igual aguas arriba (1) y aguas abajo (2) del resalto $F_{s1} = F_{s2}$.

$$F_s = A\bar{h} + \frac{Q^2}{gA}$$

Note que en un resalto hidráulico existen pérdidas de energía ($h_f$) por lo que $H_1 - H_2 = h_f$, donde $H = z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$ es la energía total en la sección. Si el canal es de sección rectangular y ancho $b$ y profundidad $y$, $F_s = \frac{by^2}{2} + \frac{Q^2}{gby}$, podemos llegar a la siguiente expresion:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + 8F^2_{R_1}} - 1\right]$$

donde el *Número de Froude* es:

$$F_R = \frac{V}{\sqrt{gy}}$$

Si $F_R > 1$ el flujo es *supercrítico*, si $F_R < 1$ el flujo es *subcrítico* y si $F_R \approx 1$ el flujo es *crítico*

## Análisis Dimensional

El análisis dimensional es una técnica matemática que hace uso del estudio de las dimensiones permitiendo predecir parametros que intervienen en un proceso físico. Constituye las bases para las leyes de similitud o semejanza. En mecánica de fluidos cualquier variable física se puede expresar en términos de: masa $M$, longitud $L$ y tiempo $T$. En terminos generales, cualquier cantidad física $X$ se puede expresar como:

$$X = M^\alpha L^\beta T^\gamma$$

Si $\alpha = \beta = \gamma = 0$ $X$ es adimensional; si $\alpha = \gamma = 0$ y $\beta \neq 0$ $X$ está en términos de $L$ y es una *magnitud geométrica*; $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ y $\gamma \neq 0$ $X$ está en términos de $L$ y $T$ y es una *magnitud cinemática* y si $\alpha\ \beta\ \gamma \neq 0$ $X$ está en términos de $L$, $T$ y $M$ y es una *magnitud dinámica.*

- **Ecuaciones homogéneas dimensionalmente**: Una ecuación es dimensionalmente homogénea cuando las dimensiones físicas de las variables a la izquierda de la igualdad de la ecuación son identicas a las dimensiones físicas de los términos a la derecha de tal igualdad. Ejemplo, la *ecuación de Torricelli* $V = \sqrt{2gh}$.

## Análisis Dimensional

- **Parametros adimensionales**: Sirven para agrupar variables físicas de tal forma que se forman relaciones sin dimensiones. Se demominan con la letra $\Pi$.

  1. *Número de Reynolds* ($Re$): Relaciona las fuerzas de inercia ($F_i$) con las fuerzas cortantes debido a la viscosidad o a la turbulencia ($F_\nu$).
  $$Re = \frac{F_i}{F_\nu} = \frac{ma}{\tau A} = \frac{\rho V L}{\mu}$$
  donde $L$ es una longitud característica.
  2. *Número de Froude* ($F_R$): Relaciona las fuerzas de inercia ($F_i$) con las fuerzas de gravedad ($F_g$).
  $$F_R = \sqrt{\frac{F_i}{F_g}} = \sqrt{\frac{ma}{mg}} = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$
  3. *Número de Match* ($M_a$): Los fluidos compresibles se pueden caracterizar por un parametro que relaciona las fuerzas de inercia ($F_i$) y las fuerzas elásticas ($F_e$).
  $$M_a = \sqrt{\frac{F_i}{F_e}} = \sqrt{\frac{ma}{K_e A}} = \frac{V}{\sqrt{K_e/\rho}} = \frac{V}{C}$$
  donde $K_e$ es el modulo de elasticidad volumétrico y $C = \sqrt{K_e/\rho}$ es la velocidad de propagación del sonido.
  4. *Número de Euler* ($E_u$): Relaciona las fuerzas de inercia ($F_i$) con las fuerzas de presión ($F_p$). Es importante en problemas de cavitación.
  $$E_u = \sqrt{\frac{F_i}{F_p}} = \sqrt{\frac{ma}{\Delta p A}} = \frac{\rho V^2}{\Delta p}$$
  5. *Número de Weber* ($E_u$): Relaciona las fuerzas de inercia ($F_i$) con las fuerzas de tensión superficial ($F_\sigma$).
  $$W_e = \frac{F_i}{F_\sigma} = \frac{ma}{\sigma L} = \frac{\rho L V^2}{\sigma}$$
  donde $\sigma$ es la fuerza de tensión superficial debido al fluido por unidad de longitud.

- **Teorema $\Pi$ de Buckingham**: *Si una ecuación con $n$ variables es dimensionalmente homogénea con respecto a $m$ dimensiones, esta ecuación se puede expresar como una relación entre un mínimo de $n-m$ grupos adimensionales ($\Pi$) independientes.* Para obtener los parametros $\Pi$ se propone:

  1. Listar las $n$ variables que intervienen en el fenómeno.
  2. Representar las variables en función de sus dimensiones $M$, $L$ y $T$.
  3. Seleccione $r$ variables repetitivas (generalmente las variables independientes). Ejemplo si $r = n - m = 3$ se debe escoger una variable geométrica (e.g.$L$), una variable cinemática (e.g. $V$) y una variable dinámica (e.g. $\rho$).
  4. Si $r = 3$, establecer para cada parametro $\Pi$ ecuaciones en teminos de $M^\alpha$ $L^\beta$ y $T^\gamma$. Adicione a cada grupo $\Pi$ una variable no repetitiva (dependiente) con exponente 1.
  5. Obtener las ecuaciones resultantes de igualar los exponentes de las variables que conforman $\Pi$ a 0. Estas ecuaciones son para encontrar los valores de $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$. Esto se hace para cada grupo $\Pi$.
  6. Comprobar que el grupo $\Pi$ es adimensional.

## Análisis Dimensional

- **Modelos hidráulicos**: Un modelo hidráulico es un modelo físico reducido de un prototipo específico (en la naturaleza) que se desea construir o estudiar. El modelo debe cumplir con tres leyes de similitud:

  1. *Similitud geométrica*: Se obtiene cuando todas las dimensiones espaciales, incluyendo la rugosidad, tienen la misma relacion de escala lineal. Por ejemplo en un modelo a escala 1:15, una unidad de $L$ en el modelo equivale a 15 unidades de $L$ en el prototipo. La relación de longitud $L_r$ es:
  $$\frac{L_m}{L_p} = L_r = C$$
  donde $L_m$ es una longitud en el modelo y $L_p$ es una longitud en el prototipo.
  2. *Similitud cinemática*: Signifíca similitud de movimiento y se obtiene si las razones de cambio (que dependen del tiempo) entre partículas del modelo y del propotipo son iguales. La relación de tiempo $t_r$ es:
  $$\frac{t_m^i - t_m^{i-1}}{t_p^i - t_p^{i-1}} = t_r = C$$
  Si son geométricamente similáres, la relación de la velocidad $V_r$ es:
  $$V_r = \frac{L_r}{t_r}$$
  3. *Similitud dinámica*: Cuando la relación de fuerzas homólogas entre el modelo y el prototipo es constante. La relación de fuerzas $F_r$ es $F_r = \frac{F_m}{F_p}$. Si un modelo sastisface la similitud dinámica, también satisface la similitud cinemática.

  En problemas de rios y costas donde los contornos son moviles (e.g. el fondo y las orillas), es frecuente distorcionar una de las dimensiones espaciales, generalmente la dimensión vertical, por lo que $L_{rv} = \frac{L_r}{n}$ donde $n$ es el factor de distorción que se determina dependiendo de las posibilidades de instalación del modelo.

- **Clasificación de los modelos físicos**: Se clasifican dependiendo de la fuerza dominante en el prototipo:

  1. *Modelo de Reynolds*: Se denominan así cuando las fuerzas viscosas son las dominantes en el flujo. La relación del $R_e$:
  $$\frac{R_{em}}{R_{ep}} = R_{er} = \frac{\rho_r U_r L_r}{\mu_r} = 1$$
  de donde $U_r = \frac{\mu_r}{\rho_r L_r}$. Si el fluido en el modelo y en el prototipo son los mismos, $U_r = \frac{1}{L_r}$.
  2. *Modelo de Froude*: Se denominan así cuando las fuerzas gobernantes son las gravitacionales. La relación del $F_{Rr}$ es:
  $$\frac{F_{Rm}}{F_{Rp}} = F_{Rr} = \frac{U_r}{\sqrt{g_r L_r}} = 1$$
  como $g_r = 1$, $U_r = \sqrt{L_r}$.

  En algunos casos (e.g. flujo en canales, sistemas de bombeo) las fuerzas dominantes son las viscosas y las gravitacionales. Sin embargo, no es posible que se cumplan ambas leyes ya que $L_r = 1$. Si de la ley de Froude tenemos que $U_r = \sqrt{L_r}$, reemplazando en la ley de Reynolds, tenemos:
  $$R_{er} = \frac{\rho_r \sqrt{L_r} L_r}{\mu_r} = \frac{L_r^{3/2}}{\nu_r} = 1$$
  de donde $L_r^{3/2} = \frac{\nu_m}{\nu_p}$. Como $L_r < 1$, esto implica que $\nu_m < \nu_p$ lo cual es difícil de lograr.