Clase No.16: Estática de los fluidos

Fuerzas sobre superficies curvas, principios de flotación y equilibrio relativo de fluidos en movimiento

Luis Alejandro Morales
https://lamhydro.github.io

Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá

March 18, 2024

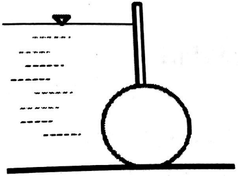
Table of Contents

Fuerzas sobre superficies curvas

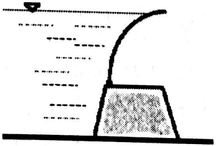
Fuerzas sobre superficies curvas: Aplicaciones

Necesaria en la estimación de fuerzas sobre estructuras hidráulicas curvas como:

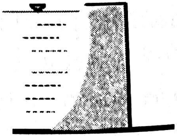
- compuertas tipo tambor
- compuertas radiales
- cara superior tipo parábola en presas



Compuerta tipo tambor

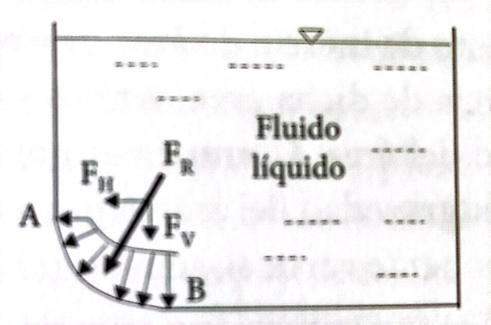


Compuerta tipo radial



Presa con talud tipo parábola

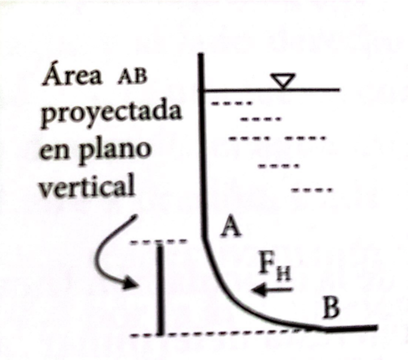
En una superficie curva sumergida, la fuerza hidroestática cambia de dirección dependiendo de la posición sobre la superficie. Para facilitar el cálculo, es necesario estimar las componentes horizontal F_H y vertical F_V de la fuerza resultante F_R sobre la superficie curva.



Fuerzas sobre superficies curvas: F_H

La fuerza horizontal F_H sobre la proyección de la superficie curva es:

$$F_H = \gamma [h_c A]_{\text{proyección}}$$



donde:

- γ: Peso específico del fluido en reposo.
- h_c: distancia vertical medida desde la superficie hasta el centro de gravedad de la superficie proyectada
- A: Área de la superficie proyectada sobre el plano vertical.

Fuerzas sobre superficies curvas: y_p y x_p para F_H

Como F_H se aplica en el centro de presiones p del área proyectada en un plano vertical, se tiene:

$$y_p = \left[y_c + \frac{\bar{I}_c}{y_c A} \right]_{\text{proyección}}$$

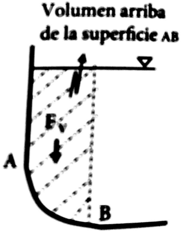
$$x_p = \left[x_c + \frac{\bar{I}_{xy}}{x_c A} \right]_{\text{proyección}}$$

donde

- $\bar{I}_c$: Momento de inercia con respecto al centro de gravedad del área proyectada en un plano vertical.
- $\bar{I}_{xy}$: Producto de inercia con respecto al centro de gravedad del área proyectada en un plano vertical.
- x_c y y_c son las coordenadas del centro de gravedad del área proyectada en un plano vertical.

La componente vertical F_V se calcula como el peso del fluido que esta por encima (físicamente o no).

$$F_V = \gamma [V]_{arriba}$$



El punto de aplicación de F_V es el centro de gravedad del volumen situado arriba de la superficie curva:

$$y_p = [y_c]_{V_{arriba}} = \frac{\int_V y dV}{\int_V dV}$$

$$x_p = [x_c]_{V_{arriba}} = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV}$$

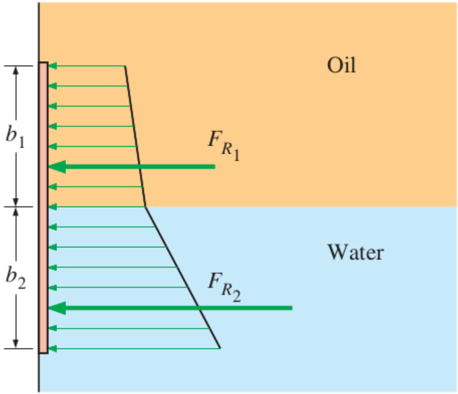
Finalmente,la magnitud de la fuerza F_R se calcula como:

$$\sqrt{F_H^2 + F_V^2}$$

Fuerzas hidroestáticas con diferentes fluidos

Fuerzas hidroestáticas con diferentes fluidos

Las ecuaciones vistas hasta el momento son válidas para fluidos de densidad uniforme. Si el fluido esta conformado por capas de fluidos de diferentes densidades, la distribución lineal de presiones cambia en cada capa.



Fuerzas hidroestáticas con diferentes fluidos

Sin embargo las ecuaciones vistas anteriormente pueden ser aplicadas a cada capa i y las $F_{R,i}$ pueden ser adicionadas para calcular la F_R:

$$F_R = \sum F_{R,i} = \sum P_{C,i} A_i$$

dondei:

- $P_{C,i} = P_0 + \gamma_i h_{C,i}$ es la presión en el centroide de la porción de la superficie en el fluido i.
- A_i es el área de la superficie en ese fluido. El centro de presión de F_R puede ser encontrado calculando la suma de los momentos de cada fuerza $F_{R,i}$ con respecto a un punto determinado (e.g. la superficie de agua).

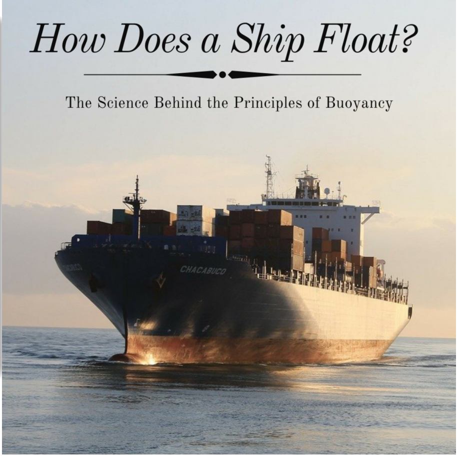
$$y_p = \frac{\sum F_{R,i}\ y_{p,i}}{F_R} \qquad x_p = \frac{\sum F_{R,i}\ x_{p,i}}{F_R}$$

Flotación y estabilidad

Flotación y estabilidad: Introducción

Fuerza de flotación

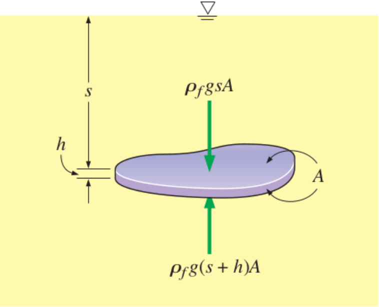
La *fuerza de flotación* (F_B) es una fuerza vertical hacia arriba que ejerce un fluido sobre un cuerpo sumergido, la cual tiende a levantar el cuerpo. Esta fuerza es causada por el incremento de la presión con la profundidad. Por esto, es común sentir que un cuerpo pesa menos cuando este está en un fluido.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Flotación y estabilidad: Fuerza de flotación

Consideremos una placa de espesor h y areá A sumergida en un liquido de densidad ρ y que es paralela a la superficie libre. El balance de fuerzas sobre la placa, con base en presiones manométricas es:



$$F_B = F_{bottom} - F_{top} = \rho g(s+h)A - \rho gsA = \rho ghA = \rho gV$$

$$\boxed{F_B = \rho gV}$$

donde $V = hA$ es el volumen de la placa. Dicha F_B es el peso del volumen de liquido desplazada que es igual al volumen de la placa.

Flotación y estabilidad: Principio de Arquímides

Principio de Arquímidez

La fuerza de flotación actuante sobre un cuerpo de densidad uniforme inmerso en un fluido es igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo, y actúa vertical a travéz del centroide del volumen desplazado. Para objetos flotantes, el peso del cuerpo debe ser igual a la fuerza de flotación, la cual es el peso del fluido cuyo volumen es igual a el volumen de la porción sumergida del cuerpo flotante. Esto es:

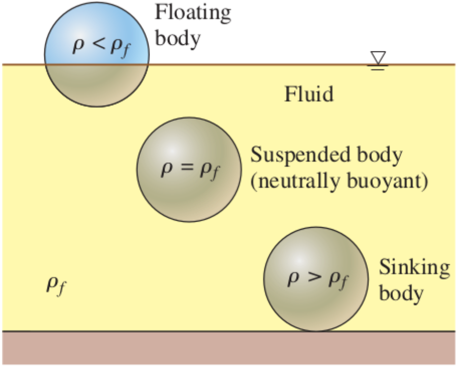
$$F_B = W \rightarrow \rho g V_{sub} = \rho_{body} g V_{total} \rightarrow \frac{V_{sub}}{V_{total}} = \frac{\rho_{body}}{\rho}$$

Tenemos entonces que la fracción de volumen del objeto flotante es igual a la relación entre la densidad promedio del cuerpo y la densidad del fluido.

Flotación y estabilidad: Principio de Arquímides

Analizando la ecuación anterior, un objeto inmerso en un fluido:

1. permanece en reposo dentro del fluido cuando $\rho = \rho_f$
2. se hunde y cae hasta el fondo dentro de el fluido cuando $\rho > \rho_f$
3. flota cuando $\rho < \rho_f$



En el caso de los gases, la densidad generalmente es mucho menor que la densidad de un liquido. Sin embargo, las fuerzas de flotación son notorias en el ascenso de aire caliente en ambientes frios, la circulación de aire en la atmósfera y el ascenso de globos y de bombas con helio.

Estabilidad de cuerpos sumergidos y flotantes

Una importante aplicación del concepto de flotación es el análisis de la estabilidad de un cuerpo flotante o sumergido, lo cual es fundamental en el disenõ de embarcaciones y submarinos. Existen tres casos que describen la estabilidad de un cuerpo:

- un cuerpo permanece **estable** si cualquier pequeña perturbación genera un movimiento que es contrarestado por una fuerza que hace que el cuerpo retorne a su posición inicial
- un cuerpo es **neutralmente estable** si después de ser perturbado cambia su posición inicial
- un cuerpo es **inestable** si al ser perturbado este no retorna a su posición inicial y continua en movimiento.

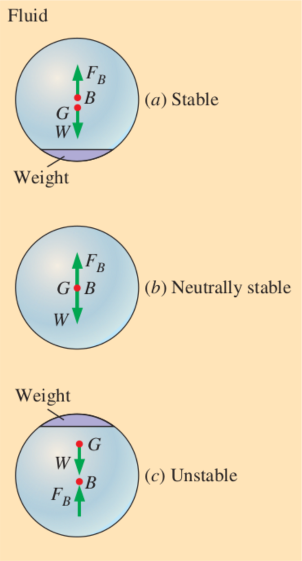
Estos tres estados son aplicables a objetos flotantes o sumergidos. Por ejemplo, un cuerpo sumergido o flotante en equilibrio estático cuyo peso es balanceado por la fuerza de flotación permanece estable en la **dirección vertical**.

Estabilidad de cuerpos sumergidos y flotantes

Estabilidad de rotación

La **estabilidad de rotación** de un cuerpo cuerpo sumergido depende de la localización relativa de el **centro de gravedad** G de el cuerpo y el centro de flotación B, el cual es el centroide del volumen desplazado.

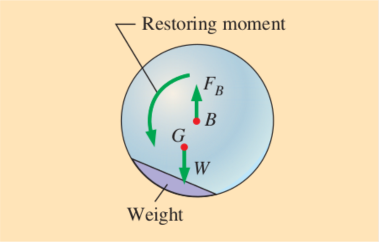
1. Un cuerpo sumergido permanece estable si su fondo es más pesado lo que hace que G este por debajo de B (e.g. motores en submarinos, canasta en globos)
2. En el caso en el que G y B coinciden, el cuerpo sumergido es neutralmente estable, lo cual es el caso de cuerpos cuya densidad es uniforme.
3. Si G esta por encima de B, el cuerpo sumergido es inestable y cualquier perturbación hace que el cuerpo se voltee.



Estabilidad de cuerpos sumergidos y flotantes

Momento restaurador

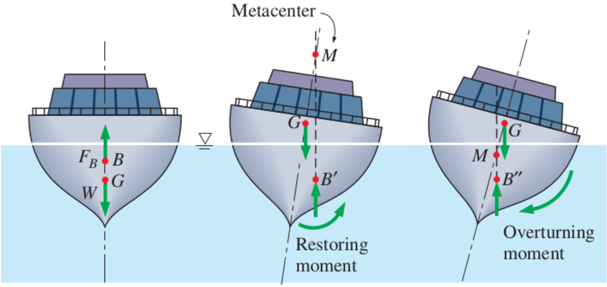
Si en un cuerpo G no esta verticalmente alineado con B no es apropiado hablar de estabilidad ya que el cuerpo no esta en un estado de equilibrio y tratara de rotar o moverse por si solo para alcanzar su estado estable. El *momento restaurador* que actúa en contra de las manecillas del reloj, tratará de rotar el cuerpo en la misma dirección con el fin de alinear G y B verticalmente.



Estabilidad de cuerpos sumergidos y flotantes

Estabilidad de rotación

La estabilidad de rotación es similar para cuerpos flotantes. Sin embargo, a diferencia de un cuerpo sumergido, un cuerpo flotante puede permanecer estable incluso cuando G esta arriba de B. Esto se logra gracias a que B se desplaza hacia B' generando un momento restaurador entre las dos fuerzas para retornar el objeto a su posición original.

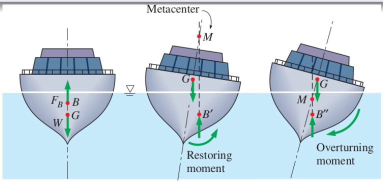


(a) Stable (b) Stable (c) Unstable

Estabilidad de cuerpos sumergidos y flotantes

Altura metacentrica

Una medida de la estabilidad de un cuerpo flotante es la **altura metacentrica** GM, la cual es la distancia entre G y el *metacentro* M (punto de intersección entre la linea de acción de las fuerza flotante antes y después de la rotación). Con base en la posición de M, un cuerpo flotante es estable si M esta arriba de G por lo que GM es positiva y es inestable si M esta abajo de G por lo que GM es negativa. Si es inestable, el peso y la fuerza de flotación actuando sobre el cuerpo inclinado genera un momento de volcamiento en lugar de un momento restaurador. Entre más grande es GM, más estable es el cuerpo flotante. Note que un bote puede inclinarse hasta cierto angulo máximo sin volcarse, sin embargo, si dicho ángulo es excedido el bote se volteará y se hundirá.



(a) Stable (b) Stable (c) Unstable

Equilibrio relativo de fluidos en movimiento

Equilibrio relativo de fluidos en movimiento

Se analizan las variaciones de presión en un fluido que se mueve como un cuerpo sólido con o sin aceleración o sin la presencia de esfuerzos cortantes. Ejemplos:

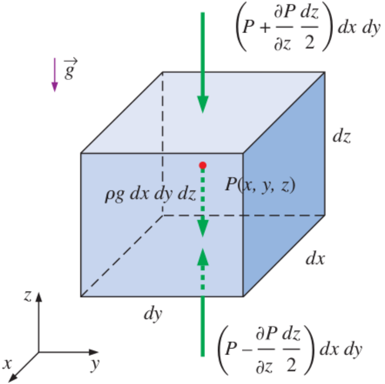
- Un carrotanque que transporta líquido en su interior, al acelerar y alcanzar una velocidad, hace que la superficie libre de el fluido se incline en la parte trasera haciendo que el volumen se mueva como un cuerpo rígido.
- De manera similar, cuando un cilindro que contiene un fluido rota a una velocidad determinada, su superficie se transforma haciendo que todo el fluido se comporte como un cuerpo rígido.

Equilibrio relativo de fluidos en movimiento

Si analizamos un elemento diferencial de fluido cuyas dimensiones son dx, dy y dz el cual se comporta como un cuerpo rígido, la fuerza neta actuante sobre el elemento según la *segunda ley de Newton* se expresa como:

$$\delta\vec{F} = \delta m \cdot \vec{a}$$

donde $\delta m = \rho\ dV = \rho\ dx\ dy\ dz$ es la masa del elemento de fluido y $\vec{a}$ es la aceleración del elemento. Si hacemos un balance de fuerzas sobre el elemento, las fuerzas actuantes sobre este son las fuerzas hidroestáticas sobre las caras del elemento y el peso del elemento en dirección z negativo.



El balance de las fuerzas de presión en la dirección z es:

$$\delta F_{S,z} = \left(P - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\ dy - \left(P + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\ dy = -\frac{\partial P}{\partial z} dx\ dy\ dz$$

De manera similar, el balance en la dirección x y y es:

$$\delta F_{S,x} = -\frac{\partial P}{\partial x} dx\ dy\ dz \qquad \delta F_{S,y} = -\frac{\partial P}{\partial y} dx\ dy\ dz$$

La fuerza de presión actuando sobre el elemento en forma vectorial, es expresada como:

$$\begin{aligned}\delta\vec{F}_S = \delta F_{S,x}\vec{i} + \delta F_{S,y}\vec{j} + \delta F_{S,z}\vec{k} &= -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}\right) dx\ dy\ dz \\ &= -\vec{\nabla} P dx\ dy\ dz\end{aligned}$$

donde $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ son los vectores unitarios en x, y y z respectivamente, y $\vec{\nabla} = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}$ es el gradiente de presión. Note que $\vec{\nabla}$ es un operador vectorial que actúa sobre una función escalar como lo es P.
La otra fuerza actuante sobre el elemento de fluido es el peso, la cual se expresa como:

$$\delta\vec{F}_{B,z} = -g\delta m\vec{k} = -\rho g dx\ dy\ dz\vec{k}$$

La fuerza total actuante sobre el elemento de fluido es:

$$\delta\vec{F} = \delta\vec{F}_S + \delta\vec{F}_B = -\left(\vec{\nabla} P + \rho g\vec{k}\right) dx\ dy\ dz$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Equilibrio relativo de fluidos en movimiento

De acuerdo con la segunda ley de Newton, $\delta\vec{F} = \delta m \cdot \vec{a} = \rho\ dx\ dy\ dz$ y substituyendo en la ecuación anterior, tenemos que la *ecuación general de movimiento de un fluido que actúa como un cuerpo rígido (sin esfuerzos cortantes)* es:

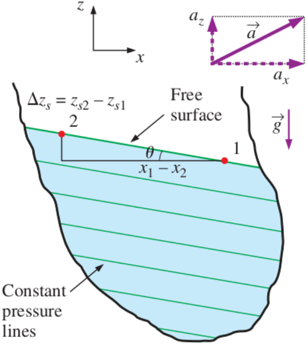
$$\boxed{\vec{\nabla}P + \rho g\vec{k} = -\rho\vec{a}}$$

Descomponiendo la ecuación vectorial, tenemos:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho a_y \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(g + a_z)}$$

donde a_x, a_y y a_z son las componentes del vector $\vec{a}$ en las direcciones x, y y z respectivamente.

Consideremos un contenedor parcialmente lleno moviendose en linea recta con una aceleración constante (e.g. carrotanque con combustible en movimiento). De acuerdo con la figura y con la ecuación general, las ecuaciones de movimiento se reducen a:



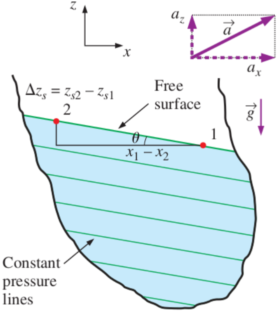
$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(g + a_z)$$

en donde P es independiente de y por lo cual $P = P(x, z)$. De acuerdo con la definición de diferencial total, $dP = (\partial P/\partial x)dx + (\partial P/\partial z)dz$, la ecuación anterior se convierte en:

$$dP = -\rho a_x dx - \rho(g + a_z)dz$$

Aceleración en línea recta

Para determinar la diferencia de presión entre los puntos 1 y 2 (ver figura), integramos la ecuación para x y z:



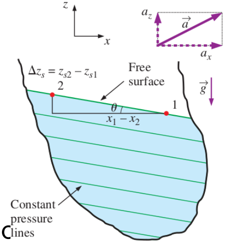
$$P_2 - P_1 = -\rho a_x (x_2 - x_1) - \rho (g + a_z)(z_2 - z_1)$$

Si tomamos como origen el punto 1 ($x = 0$ y $z = 0$) en donde la presión $P = P_0$, la *variación de presión en cualquier punto del fluido* es:

$$\boxed{P = P_0 - \rho a_x x - \rho (g + a_z) z}$$

Aceleración en línea recta

Si deseamos calcular el cámbio de elevación de la superficie libre del fluido, el cámbio de nivel del punto 2 con respecto a 1, y de acuerdo a la ecuación anterior $P_1 = P_2$, es:



$$\Delta z_s = z_{s2} - z_{s1} = -\frac{a_x}{g + a_z}(x_2 - x_1)$$

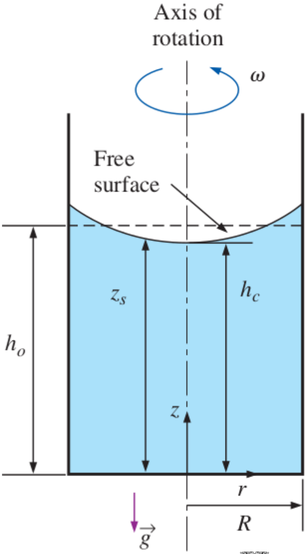
donde z_s indica la localización sobre la superficie.

De manera similar, las superficies con presión constante c **isobaras** pueden ser descritas desde $dP = -\rho a_x dx - \rho(g + a_z)dz$ para $dP = 0$ como:

$$\boxed{\frac{dz_{isobar}}{dx} = -\frac{a_x}{g + a_z} = \text{constante}}$$

De acuerdo con lo anterior, las isobaras son superficies paralelas (ver figura) cuya pendiente es $m = \frac{dz_{isobar}}{dx} = -\frac{a_x}{g+a_z} = \tan\theta$.

Si hacemos rotar un vaso lleno de agua alrededor de su eje vertical, el agua tiende a apartarse desde el centro hacia las paredes formando una superficie libre cóncava; todo esto gracias a la *fuerza centrifuga*. Si analizámos el cilindro de la figura, el cual rota a velocidad angular ω, cada partícula del fluido se moverá a la misma velocidad y todo el fluido se moverá como un cuerpo rígido que no se deforma, una vez se alcance una condición permanente. Para analizar este caso, es conveniente el análisis en coordenadas poláres (r, θ, z), en donde z represente el eje de rotación del fluido. Por definición, la aceleración centripeta es $r\omega^2$ y positiva hacia el centro; note que la aceleración no depende de θ ya que es simétrica con respecto a z.



Rotación de un contenedor cilíndrico

Aplicando la ecuación general:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho r \omega^2 \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

De acuerdo con la definición de diferencial total, $dP = (\partial P/\partial r)dr + (\partial P/\partial z)dz$, la ecuación anterior se convierte en:

$$dP = \rho r \omega^2 dr - \rho g dz$$

Para superficies con presión constante ($dP = 0$), la distancia vertical z se convierte en una función de r como:

$$\frac{dz_{isobar}}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}$$

integrando la ecuación anterior:

$$z_{isobar} = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C_1$$

en donde la ecuación anterior es la ecuación de la parábola por lo que las superficies de presión constante forman un parabolóide de revolución. La ecuación anterior representa una familia de curvas. Por lo tanto, para la superficie libre, cuya altura es conocida e igual a h_c, $C_1 = h_c$ cuando $r = 0$ y la ecuación anterior para la superficie libre se convierte en:

$$z_s = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_c$$

en donde z_s es la distancia desde el fondo hasta la superficie.

Rotación de un contenedor cilíndrico

Teniendo en cuenta que el volumen de un anillo es $dV = 2\pi r z_s dr$, el volumen del parabolódide formado por la superficie libre es:

$$V = \int_{r=0}^{R} 2\pi z_s r dr = 2\pi \int_{r=0}^{R} \left(\frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_c \right) r dr = \pi R^2 \left(\frac{\omega^2}{4g} R^2 + h_c \right)$$

De acuerdo con el principio de conservación de la masa, el volumen del cilindro es:

$$V = \pi R^2 h_0$$

en donde h_0 es la altura del fluido en el contenedor antes de rotar. Igualando las ecuaciones anteriores, h_c se convierte en:

$$h_c = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

reemplazando en la ecuación, la altura de la superficie libre sería:

$$\boxed{z_s = h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2)}$$

La diferencia de altura entre el centro y el borde del contenedor se obtiene evaluando la ecuación anterior cuando $r = 0$ y $r = R$:

$$\boxed{\Delta z_{s,max} = z_s(R) - z_s(0) = \frac{\omega^2}{2g} R^2}$$

Rotación de un contenedor cilíndrico

Por otro lado, si la densidad ρ es constante, la diferencia de presión entre dos puntos 1 y 2 se determina integrando la ecuación general, lo cual queda:

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho\omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2) - \rho g(z_2 - z_1)$$

Si tomamos como punto 1 $r = 0$ y $z = 0$ donde la presión es igual P_0, la presión en cualquier punto (e.g. P_2) es:

$$\boxed{P = P_0 + \frac{\rho\omega^2}{2} r^2 - \rho g z}$$

Según la ecuación anterior, para un radio conocido, P varia hidroestáticamente en la dirección vertical como un fluido en reposo. Por otro lado, para una distancia z conocida, P cambia con el cuadrado de r e incrementa desde el centro hacia los bordes. La diferencia de presión entre el centro y el borde del contenedor es:

$$\boxed{\Delta P = \frac{\rho\omega^2}{2} R^2}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA