Clase No.20: Cinemática de los fluidos

Propiedades cinemáticas de los fluidos

Luis Alejandro Morales
https://lamhydro.github.io

Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá

March 19, 2024

Table of Contents

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Introducción

Introducción

Cinemática de los fluidos

Estudia el movimiento de las partículas de fluido o del fluido como un continuo sin considerar las fuerzas o los momentos actuantes; caracteriza dicho movimiento en función del espacio y del tiempo.

Definiciones

Definiciones

Algunas definiciones importantes del análisis vectorial son:

Escalar

Se define por la magnitud que acquiere la cantidad física. Ejemplos: presión P, temperatura T, densidad ρ

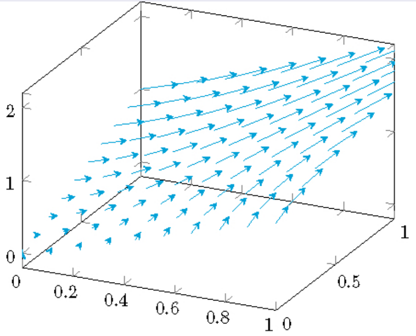
$$P = f(x, y, z, t) \quad T = f(x, y, z, t) \quad \rho = f(x, y, z, t)$$

donde x, y y z son las coordenadas del espacio 3D y t es el tiempo.

Vector: Definición

Es una cantidad que tiene magnitud, dirección y sentido. Ejemplos: velocidad $\vec{U}$, aceleración $\vec{a}$, fuerza $\vec{F}$. Un campo de velocidades para un $t = t_1$, puede estar expresado como:

$$\vec{U}(x, y, z) = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$$

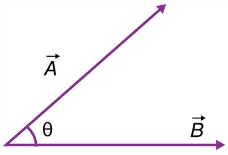


donde u_x, u_y y u_z son las componentes en x, y y z del vector $\vec{U}$ respectivamente, en donde cada componente es una $f(x, y, z, t)$. $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{z}$ son los vectores unitarios (de magnitud 1) para x, y y z, respectivamente.

Vector: Operaciones

Entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es posible efectuar dos tipos de productos:

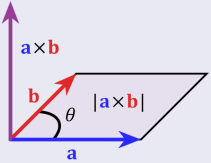
1. *Producto escalar o punto*



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$$

donde θ es el angulo formado por los dos vectores. De acuerdo con esto $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, mientras, por ejemplo, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$.

2. *Producto vectorial o cruz*



$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{n}AB\sin\theta$$

donde $\vec{n}$ es el vector unitario perpendicular la plano definido por $\vec{A}$ y $\vec{B}$. De este producto se deriva que $i \times j = k$,$j \times k = i$,$k \times i = j$, $i \times k = -j$

Vector: Operadores vectoriales

Operador nabla ∇

Vector simbólico que se aplica a cantidades *escalares* y *vectoriales*, se define como:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \tag{1}$$

Gradiente de una función

Si el operador ∇ se aplica a una función escalar ϕ, se obtiene un vector gradiente definido como:

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k} \tag{2}$$

Divergencia

Si el operador ∇ aplica a un vector $\vec{U}$ mediante producto punto, se obtiene un escalar conocido como la divergencia de $\vec{U}$, que se expresa como:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right][u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}] = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (3)$$

Note que $\nabla\cdot\vec{U} \neq \vec{U}\cdot\nabla$, entonces:

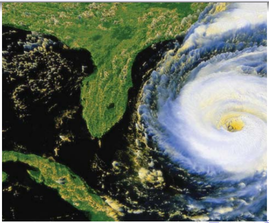
$$\vec{U}\cdot\nabla = [u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}]\left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right] = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

Rotacional

Es el producto cruz entre el operador ∇ y un vector $\vec{U}$, se obtiene un vector conocido como el rotacional de $\vec{U}$, que se expresa como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{U} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right] x[u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{U} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (4)$$



Laplaciano

Se define como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] \tag{5}$$

Si ∇^2 se aplica sobre una función escalar ϕ, se obtiene el escalar:

$$\nabla^2 \phi = \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right] \tag{6}$$

Si ∇^2 se aplica sobre un vector $\vec{U}$ (e.g. velocidad), se obtiene el vector:

$$\nabla^2 \vec{U} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] [u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}]$$

$$\nabla^2 \vec{U} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] \vec{i} + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right] \vec{j} + \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] \vec{k}$$

$$\nabla^2 \vec{U} = \vec{i}\nabla^2 u + \vec{j}\nabla^2 v + \vec{k}\nabla^2 w \tag{7}$$

Campo escalar

Un escalar ϕ es función de las coordenadas espaciales x, y y z o del vector de posición $\vec{r}$ del punto $P(x, y, z)$; $\vec{r}$ une al origen del sistema de referencia con P. Es posible entonces escribir:

$$\phi = \phi(x, y, z) = \phi(P) = \phi(\vec{r})$$

Por lo tanto un campo escalar queda definido si para cada punto P existe un único valor de ϕ exigiéndose que la función $\phi(x, y, z)$ sea continua y derivable en el espacio. El espacio geométrico para el cual múltiple puntos (x, y, z) tienen el mismo valor de ϕ se denomina superficie equipotencial. Si $\phi = f(x, y)$, el lugar geométrico de todos los punto con igual valor ϕ es una linea equipotencial. La presión en un fluido es un ejemplo de un campo escalar.

Campo vectorial y potencial

Campo vectorial

Si un vector $\vec{A}$ es función de su posición (x, y, z) en el espacio, se puede escribir que:

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z) = \vec{A}(P) = \vec{A}(\vec{r}) = a(x, y, z)\vec{i} + b(x, y, z)\vec{j} + c(x, y, z)\vec{k}$$

donde a b y c son las componentes de $\vec{A}$. Por lo tanto un campo vectorial esta definido si existe un valor de $\vec{A}$ en capa punto $P(x, y, z)$. La velocidad de un fluido $\vec{U}$ es un ejemplo de un campo vectorial.

Campo potencial

Un campo potencial es aquel en el que:

$$\vec{U} = \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$$

en donde $\vec{U}$ es la velocidad y ϕ es una función escalar.

Concepto de flujo de un campo vectorial y de circulación de un vector

Concepto de flujo de un campo vectorial

Supóngase que existe un campo vectorial $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ y una superficie S delimitada por una linea L. Un diferencial dS esta definido por el vector unitario $\vec{n}$ perpendicular a dS. Asi el flujo del vector A a través de la superficie S es:

$$\psi = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int_S \vec{A} \cdot dS$$

Concepto de circulación de un vector

La circulación de un vector $\vec{A}$ a lo largo de la linea L está definida como:

$$\Gamma = \int_L \vec{A} \cdot d\vec{L}$$

Si $\vec{A}$ representa un campo de fuerza $\vec{F}$, Γ representa el trabajo mecánico realizado por $\vec{F}$.

Teorema de Gauss de la divergencia

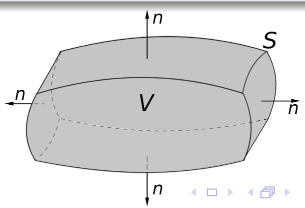
Teorema de Gauss de la divergencia

Teorema de Gauss de la divergencia

La integral de la divergencia de un campo escalar o vectorial A tomada sobre un volumen V es igual a la integral de la componente normal de este campo tomada sobre la superficie S que encierra el volumen V. Esto se expresa como:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot A dV = \int_S \vec{A}\vec{n} dS \tag{8}$$

El teorema permite transforma integrales de volumen en integrales de superficie o viceversa. Su importancia física radica en que sirve para calcular el flujo neto a través de una superficie cerrada de una cantidad escalar o vectorial.



Teorema de Stokes

Teorema de Stokes

La integral de linea de la componente tangencial de un vector A a lo largo de una curva cerrada C es igual a la integral de superficie de la componente normal del rotacional de A extendida a una superficie cualquiera que tenga por contorno la curva C. Esto se expresa como:

$$\int_C A \cdot dl = \int_S \vec{n}(\nabla \times A) dS \tag{9}$$

donde dl es un pequeno desplazamiento a lo largo de la curva C y dS es es un pequeno vector de area.